Université Joseph Fourier - Grenoble I Année 2012-2013
Module MAT 234

Examen du mercredi 26 juin 2013 — Corrigé

Exercice 1 – [*8 points*]

1. On calcule le polynôme caractéristique

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}(\lambda-1)(2\lambda+1)^2.$$

de sorte que les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ de multiplicité 1 et $\lambda_2 = -1/2$ de multiplicité 2.

Le sous espace propre E_{λ_1} est l'ensemble des vecteur $X = (x, y, z)^T$ tels que $A.X = X \Leftrightarrow x = y = z$, soit $E_{\lambda_1} = \mathrm{Vect}\{v_1 = (1, 1, 1)^T\}$.

Le sous espace propre E_{λ_2} est l'ensemble des vecteur $X = (x, y, z)^T$ tels que $A.X = (-1/2)X \Leftrightarrow x + y + z = 0$, soit $E_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}\{v_2 = (-1, 1, 0)^T, v_3 = (-1, 0, 1)^T\}$.

La matrice A est diagonalisable car, d'une part le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{R}$ (la matrice A admet 3 valeurs propres réelles comptées avec leur multiplicité) et d'autre part la dimension de chaque sous espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée.

2. La matrice A se diagonalise donc sous la forme $A = P\,D\,P^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.

$$A^n = P\,D^n\,P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2(-1/2)^n & 1-(-1/2)^n & 1-(-1/2)^n \\ 1-(-1/2)^n & 1+2(-1/2)^n & 1-(-1/2)^n \\ 1-(-1/2)^n & 1-(-1/2)^n & 1+2(-1/2)^n \end{pmatrix}.$$

5. a) $\det(A) = \det(D) = (-1/2)^2 = 1/4$.
b) $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ car A est inversible.

6.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + 2y - z = 1 \\ -x - y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 3\,P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}P\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

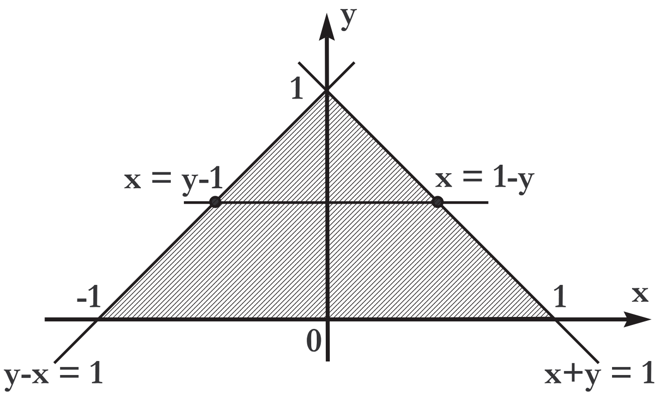
7. On vérifie que pour tout entier n on a : $U_n = U_0\, A^n$.
   Ainsi, pour tout vecteur initial U_0 tel que $x_0 + y_0 + z_0 = 1$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} (U_0\, A^n) = U_0 \Big(\lim_{n\to+\infty} A^n \Big) = (x_0, y_0, z_0)\, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1/3, 1/3, 1/3).$$

Exercice 2 – [*5 points*]

1.

$$\Delta = \{(x, y) \in I\!R^2 \ ,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1,\ y - x \leq 1\}$$



2.

$$I = \int_0^1 \Big(\int_{x=y-1}^{x=1-y} x^2 y \ \mathrm{d}x \Big) \ \mathrm{d}y$$

3.

$$I = \int_0^1 y \Big[\frac{x^3}{3} \Big]_{x=y-1}^{x=1-y} \ \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{y}{3} \Big((1-y)^3 - (y-1)^3 \Big) \ \mathrm{d}y = \frac{2}{3} \int_0^1 \Big(y - 3y^2 + 3y^3 - y^4 \Big) \ \mathrm{d}y$$

$$= \frac{2}{3} \Big[\frac{y^2}{2} - y^3 + \frac{3}{4} y^4 - \frac{1}{5} y^5 \Big]_0^1 = \frac{1}{30}.$$

4. Le volume V du domaine D se calcule de la manière suivante.

$$V = \mathrm{vol}(D) = \iint_\Delta 30\, x^2 y \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 30 \iint_\Delta x^2 y \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 30\, I = 1\,.$$

Exercice 3 – [*4 points*]

1. Le gradient $\nabla f(x, y)$ et la matrice hessienne $H_f(x, y)$ de f au point (x, y) sont donnés par :

$$\nabla f(x, y) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \Big)^T = (4\, x^3 - 4\, y, 4\, y^3 - 4\, x)^T \quad \text{et} \quad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x & -4 \\ -4 & 12y \end{pmatrix}.$$

2. les points critiques de f sont caractérisés par

$$\nabla f(x, y) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x \end{cases}$$

   ce qui conduit après substitution à $x = x^9$ et $y = y^9$, et donc à $x^8 = y^8 = 1$ si x et y sont différents de 0.

3. On note que pour un point critique (x_0, y_0), si $x_0 = 0$ alors $y_0 = 0$ et réciproquement. Le point $(x_0, y_0) = (0, 0)$ est un point critique de f. Pour $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, la relation $x_0^8 = y_0^8 = 1$ conduit à $x_0 = \pm 1$ et $y_0 = \pm 1$. En reportant dans le système initial, on trouve finalement que f admet les trois points critiques suivants. $A = (0, 0)$, $B = (-1, -1)$, $C = (1, 1)$.

4. $A = (0, 0)$ est un point selle : $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$,

   $B = (-1, -1)$ est un maximum local strict : $H_f(-1, -1) = \begin{pmatrix} -12 & -4 \\ -4 & -12 \end{pmatrix}$,

   $C = (1, 1)$ est un minimum local strict : $H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$.

5. Les dérivées directionnelles de f au point critique $(1, 1)$ sont toutes nulles. En effet, pour toute direction $\mathbf{d}$, on a $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{d}}(1, 1) = \nabla f(1, 1) \,.\, \mathbf{d} = 0$ car $\nabla f(1, 1) = \vec{0}$. Précisément, le plan tangent à la surface représentative de f est horizontal en ce point.

Exercice 4 – [*4 points*]

Soit $f : I\!R^* \times I\!R \to I\!R$ la fonction définie par $f(x, y) = x + \cos(y^3/x)$.

1. $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 + \frac{y^3}{x^2}\sin(y^3/x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{3y^2}{x}\sin(y^3/x).$$

2. On reporte les dérivées partielles calculées ci-dessus dans l'équation aux dérivées partielles (1), ce qui conduit à :

$$3\,x^2 \left(1 + \frac{y^3}{x^2}\sin(y^3/x)\right) + xy\left(-\frac{3y^2}{x}\sin(y^3/x)\right)$$
$$= 3\,x^2 + 3\,y^3\sin(y^3/x) - 3y^3\sin(y^3/x) = 3\,x^2.$$

   L'équation (1) est donc vérifiée par f.

3. On considère le changement de fonction $g(u, v) = g\big(u(x, y), v(x, y)\big) = F(x, y)$ avec

$$\begin{cases} u(x, y) = x \\ v(x, y) = y^3/x \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_{(u,v)}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -y^3/x^2 & 3y^2/x \end{pmatrix}.$$

   Les dérivées partielles premières de F s'expriment alors sous la forme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial g}{\partial u}\,.\,1 + \dfrac{\partial g}{\partial v}\,.\,\big(-y^3/x^2\big) \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \dfrac{\partial g}{\partial u}\,.\,0 + \dfrac{\partial g}{\partial v}\,.\,\big(3y^2/x\big) \end{cases}.$$

   En les reportant dans l'EDP (1), on obtient après simplification $\dfrac{\partial g}{\partial u} = 1$, ce qui conduit à $g(u, v) = u + \varphi(v)$, où φ est une fonction dérivable.

   Finalement, la solution de l'EDP (1) s'écrit

$$F(x, y) = x + \varphi(y^3/x) \quad \text{avec } \varphi \text{ dérivable.}$$