Université Joseph Fourier - Grenoble I Année 2013-2014
Module MAT234

Examen de juin 2014 — Session 2

Tous documents et notes manuscrites interdits.
Calculettes, téléphones portables interdits.

Durée 2h

Exercice 1 – [*8 points*]

L'espace $\mathbb{R}^4$ est muni de la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ et on considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ dont la matrice A dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice A.
2. En déduire l'ensemble des valeurs propres de la matrice A, avec leur multiplicité. *Les valeurs propres distinctes seront classées selon un ordre croissant :* $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$
3. Déterminer les sous espaces propres de f en précisant leur dimension. *Pour valeur propre* λ_i *et chaque vecteur propre trouvé* v_i*, il sera judicieux de vérifier que* $f(v_i) = \lambda_i \, v_i$*, sauf si vous avez une confiance aveugle en vos calculs...*
4. Justifier que la matrice A est diagonalisable.
5. Déterminer une matrice inversible P (*dont la première ligne ne comporte que des* 1) et une matrice diagonale D telles que $A = P\,D\,P^{-1}$.
6. Déterminer le noyau de l'application f ainsi que son rang.
7. Calculer la matrice D^p pour $p \in \mathbb{N}^*$.
8. Calculer la matrice A^p pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 – [*3 points*]

On considère les 2 fonctions suivantes

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u, v) & \mapsto & \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ x^2-y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \end{array}.$$

Déterminer les matrices jacobiennes de f, g et $h = g \circ f$.

Exercice 3 – [*4 points*]
On se place dans le plan $I\!R^2$. Soit C l'intérieur de la couronne délimitée par les deux cercles centrés en $(0,0)$, de rayons respectifs $R_1 = 1/\sqrt{2}$ et $R_2 = \sqrt{2}$.
On note Δ la partie de cette couronne C vérifiant $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

1. Ecrire précisément les inégalités définissant le domaine Δ :
   a) relativement aux coordonnées cartésiennes (x, y),
   b) relativement aux coordonnées polaires (r, θ).
2. Calculer l'intégrale

$$I = \int\int_{\Delta} (x^2 + y^2)\, e^{-(x^2+y^2)^2}\, dxdy.$$

Exercice 4 – [*5 points*]
Soit la fonction $f \ : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ définie par

$$f(x, y) = xy\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Calculez la matrice hessienne

$$H_f(x, y) \quad = \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix}$$

de f au point (x, y).

3. Pour chaque point critique, déterminez s'il s'agit d'un maximum local, d'un minimum local ou d'un point col (point selle).