Université Joseph Fourier - Grenoble I Année 2013-2014
Module MAT234

Examen du 23 juin 2014 (session 2) : CORRIGÉ

Exercice 1 – [*8 points*] L'espace $\mathbb{R}^4$ est muni de la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ et on considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ dont la matrice A dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice A.
2. En déduire l'ensemble des valeurs propres de la matrice A, avec leur multiplicité. *Les valeurs propres distinctes seront classées selon un ordre croissant :* $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$
3. Déterminer les sous espaces propres de f en précisant leur dimension. *Pour valeur propre λ_i et chaque vecteur propre trouvé v_i, il sera judicieux de vérifier que $f(v_i) = \lambda_i\, v_i$, sauf si vous avez une confiance aveugle en vos calculs...*
4. Justifier que la matrice A est diagonalisable.
5. Déterminer une matrice inversible P (*dont la première ligne ne comporte que des* 1) et une matrice diagonale D telles que $A = P\,D\,P^{-1}$.
6. Déterminer le noyau de l'application f ainsi que son rang.
7. Calculer la matrice D^p pour $p \in \mathbb{N}^*$.
8. Calculer la matrice A^p pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Corrigé exercice 1

1. Polynôme caractéristique :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, I_4) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1-\lambda & 2 \\ -3 & 0 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = (\lambda+1)\,(\lambda-0)\,(\lambda-1)\,(\lambda-2).$$

2. La matrice A admet donc 4 valeurs propres simples (chacune est de multiplicité égale à 1) : $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1,\ \lambda_4 = 2$.
3. Les sous espaces propres sont ensuite obtenus par un calcul direct :

$$E_{\lambda_1} = \ker(A - \lambda_1\, I_4) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \cdots$$
$$= \mathrm{Vect}\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$
$$E_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}\left\{ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_{\lambda_3} = \mathrm{Vect}\left\{ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_{\lambda_4} = \mathrm{Vect}\left\{ v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. La matrice A est diagonalisable car i) son polynôme caractéristique est scindé et ii) chaque valeur propre est simple.
   Les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 forment donc une base de vecteurs propres de la matrice A.
5. La matrice D est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3, λ_4. La matrice P est la matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs propres,

elle est donc inversible (*l'inverse n'est pas demandé ici, mais sera nécessaire pour la question 8*). Finalement, on obtient :

$$A = P\,D\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Puisque $\lambda_2 = 0$ est valeur propre de A, on a $\ker(f) = E_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}\big\{v_2\big\}$ et ainsi f est de rang 3.
7. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on obtient directement

$$D^p = \begin{pmatrix} (-1)^p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}.$$

8. Puis finalement

$$A^p = P\,D^p\,P^{-1} = \cdots = \begin{pmatrix} (-1)^p - 1 + 2^p & 1 & (-1)^p - 1 + 2^p & -2^p \\ (-1)^p - 1 & 1 & (-1)^p - 1 & 0 \\ 1 - 2^p & -1 & 1 - 2^p & 2^p \\ (-1)^p - 2^p & 0 & (-1)^p - 2^p & 2^p \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 – [*3 points*]

On considère les 2 fonctions suivantes

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ x^2-y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \end{array}.$$

Déterminer les matrices jacobiennes de f, g et $h = g \circ f$.

Corrigé exercice 2 La matrice jacobienne de chacune des applications f, g et $h = g \circ f$ est la matrice de ses dérivées partielles premières.

1. Pour $f(u,v) = \big(f_1(u,v), f_2(u,v)\big) = (u+v, u-v)$, on a :

$$J_f(u,v) == \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial f_1}{\partial v}(u,v) \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial f_2}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Pour $g(x,y) = \big(g_1(x,y), g_2(x,y), g_3(x,y)\big) = (x^2+y^2, x^2-y^2, 2xy)$, on a :

$$J_g(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial g_3}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial g_3}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

3. Pour $h = g \circ f$, on a directement d'après le cours :

$$\begin{aligned} J_h(u,v) &= J_g\big(f(u,v)\big) \,.\, J_f(u,v) = J_g\big(u+v, u-v\big) \,.\, J_f(u,v) \\ &= \begin{pmatrix} 2(u+v) & 2(u-v) \\ 2(u+v) & -2(u-v) \\ 2(u-v) & 2(u+v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u & 4v \\ 4v & 4u \\ 4u & -4v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarque : on peut aussi commencer par expliciter l'application $h = g \circ f$ puis calculer sa matrice jacobienne :

$$\begin{aligned} h(u,v) &= g\big(f(u,v)\big) = g\big(u+v, u-v\big) \\ &= \Big((u+v)^2 + (u-v)^2, (u+v)^2 - (u-v)^2, 2(u+v)(u-v)\Big) \\ &= \Big(2u^2 + 2v^2, 4uv, 2u^2 - 2v^2\Big), \end{aligned}$$

ce qui permet de retrouver le résultat pour $J_h(u,v)$.

Exercice 3 – [*4 points*]
On se place dans le plan $I\!R^2$. Soit C l'intérieur de la couronne délimitée par les deux cercles centrés en $(0,0)$, de rayons respectifs $R_1 = 1/\sqrt{2}$ et $R_2 = \sqrt{2}$.
On note Δ la partie de cette couronne C vérifiant $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

1. Ecrire précisément les inégalités définissant le domaine Δ :
   a) relativement aux coordonnées cartésiennes (x,y),
   b) relativement aux coordonnées polaires (r,θ).
2. Calculer l'intégrale

$$I = \int\int_\Delta (x^2+y^2)\, e^{-(x^2+y^2)^2}\, dxdy.$$

Corrigé exercice 3

1. Les inégalités définissant le domaine Δ s'écrivent,
   a) relativement aux coordonnées cartésiennes (x,y) :

$$\begin{array}{lcl} 1/\sqrt{2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{2} & & 1/2 \leq x^2+y^2 \leq 2 \\ x \geq 0 & \Leftrightarrow & x \geq 0 \\ y \geq 0 & & y \geq 0 \end{array}$$

   b) relativement aux coordonnées polaires (r,θ) :

$$\begin{array}{r} 1/\sqrt{2} \leq r \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{array}$$

2. Par passage aux coordonnées polaires, nous obtenons directement :

$$\begin{aligned} I &= \int\int_\Delta (x^2+y^2)\, e^{-(x^2+y^2)^2}\, dxdy \\ &= \int\int_\Delta r^2\, e^{-r^4}\, r\, drd\theta \\ &= \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} d\theta\right)\left(\int_{r=\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} r^3\, e^{-r^4}\, dr\right) \\ &= \pi/2 \left[-\frac{1}{4}\, e^{-r^4}\right]_{r=\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \\ &= -\frac{\pi}{8}\left(e^{-4} - e^{-\frac{1}{4}}\right). \end{aligned}$$

Exercice 4 – [*5 points*]
Soit la fonction $f \ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = xy\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Calculez la matrice hessienne

$$H_f(x,y) \quad = \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

de f au point (x,y).

3. Pour chaque point critique, déterminez s'il s'agit d'un maximum local, d'un minimum local ou d'un point col (point selle).

Corrigé exercice 4

1. Les points critiques de f sont les points qui annulent ses deux dérivées partielles premières :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (y - x^2 y)\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x - xy^2)\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

L'exponentielle ne s'annulant pas, on a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y\,(1 - x^2) = 0 \\ x\,(1 - y^2) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} y = 0 & \text{ou} & x = \pm 1 \\ x = 0 & \text{ou} & y = \pm 1 \end{array} \right. ,$$

de sorte que f admet les 5 points critiques suivants

$$A = (0,0), \quad B = (1,1), \quad C = (1,-1), \quad D = (-1,1), \quad E = (-1,-1).$$

2. Matrice hessienne de f au point (x,y) :

$$H_f(x,y) \quad = \quad e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}. \begin{pmatrix} -3xy + x^3 y & 1 - x^2 - y^2 + x^2 y^2 \\ \\ 1 - x^2 - y^2 + x^2 y^2 & -3xy + xy^3 \end{pmatrix}.$$

3. Point $A = (0,0)$: $\det\big(H_f(0,0)\big) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} < 0, \to$ f admet un point col en A.

Point $B = (1,1)$: $\det\big(H_f(1,1)\big) = e^{-1}. \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} > 0, \to$ f admet un maxi local strict en B.

Point $C = (1,-1)$: $\det\big(H_f(1,-1)\big) = e^{-1}. \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0, \to$ f admet un mini local strict en C.

Point $D = (-1,1)$: $\det\big(H_f(-1,1)\big) = e^{-1}. \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0, \to$ f admet un mini local strict en D.

Point $E = (-1,-1)$: $\det\big(H_f(-1,-1)\big) = e^{-1}. \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} > 0, \to$ maxi local strict en E.