Université Joseph FOURIER - GRENOBLE I
Module MAT 234 Année 2011-2012

Examen du lundi 11 juin 2012
Seconde session

Tous documents et notes manuscriptes interdits.
Calculettes, téléphones portables interdits.

Durée 2h

Exercice 1 – [*9 points*]

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ dont la matrice relativement à la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. a) [*1 point*] Déterminer le noyau de la matrice A.

   b) [*1 point*] En déduire une valeur propre de la matrice A et le sous espace propre associé.

2. [*1.5 point*] Déterminer l'image des vecteurs $v_3 = (1, 0, 1, 0)$ et $v_4 = (1, 1, 0, 1)$ par A et justifier précisément pourquoi la matrice A est diagonalisable.

3. [*0.5 point*] Déterminer l'image du vecteur $v_1 = (1, 1, 1, 1)$. Donner l'ensemble des valeurs propres de la matrice A avec leur multiplicité ainsi que les sous espaces propres associés.

4. [*0.5 point*] Déterminer une matrice inversible P (*composée uniquement de 0 et de 1*) et une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, avec $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4$, telles que $A = P\,D\,P^{-1}$.

5. [*2 points*] Calculer la matrice P^{-1}.

6. On considère désormais la matrice $E = \frac{1}{2}A$.

   a) [*1 point*] Déterminer une matrice diagonale Δ et une matrice inversible Q telle que $E = Q\Delta Q^{-1}$. Préciser la matrice Q^{-1}.

   b) [*1.5 point*] En déduire la limite de la matrice E^n lorsque n tend vers $+\infty$. [*Le calcul de la matrice E^n n'est pas demandé*].

Exercice 2 – [*6 points*]

On considère la fonction f définie sur $I\!R^2$ par $f(x,y) = (x^2+y^2)^2$, ainsi que les domaines suivants de $I\!R^2$ et $I\!R^3$:

$\Delta = \{(x,y) \in I\!R^2 \quad | \quad x^2+y^2 \leq 1, \quad x-y \geq 0, \quad x+y \geq 0\}$,

$D = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \quad | \quad (x,y) \in \Delta, \quad 0 \leq z \leq f(x,y)\}$.

On se propose ici de calculer l'intégrale

$$I = \int\int_{\Delta} f(x,y)\,dxdy\,.$$

1. Représenter graphiquement le domaine Δ.
2. Décrire le domaine Δ en fonction des coordonnées polaires r, θ.
3. Calculer l'intégrale I.
4. Donner la signification géométrique de l'intégrale I.

Exercice 3 – [*5 points*]

Soit la fonction $f \; : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ définie par

$$f(x,y) = xy\,e^{-(\frac{x^2+y^2}{2})}.$$

1. [*2 points*] Déterminer les points critiques de f.
2. [*1 point*] Calculez la matrice hessienne

$$H_f(x,y) \quad = \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

de f au point (x,y).

3. [*2 points*] Pour chaque point critique, déterminez s'il s'agit d'un maximum local, d'un minimum local ou d'un point col (point selle).