L2 - UE MAT234

Analyse – Corrigé rapide de la feuille d'exercices n° 1

---

1. $Df_1 = R^* \times R^*$ $Df_2 = \{(x,y)/x+y \neq 0\}$ $Df_3 = R^2 \setminus \{(0,0)\}$ $Df_4 = R^*_+ \times R^*_+ \cup R^*_- \times R^*_-$

2. A9 B8 C14 D13 E6 F2 G3 H7 I10 J15 K5 L12

3. courbe de niveaux $f_i(x,y) = K$
f_1 : $\emptyset$ si $K < 0$, droite $x = 2$ si $K = 0$, 2 droites $x = 2 \pm \sqrt{K}$ si $K > 0$
f_2 : $y = \pm\sqrt{x^2 - K}$ si $K \leq 0$, $x = \pm\sqrt{y^2 + K}$ si $K \geq 0$
f_3 : $y = (x + 1/2)^2 - 1/4 - K$ parabole de sommet $(-1/2, -1/4 - K)$
f_4. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = K$: $\emptyset$ si $K < 0$, point $P(1,-2)$ si $K = 0$, cercle de centre P de rayon $\sqrt{K}$ si $K > 0$

4. $f_1(r,\theta) = r$ $f_2(r,\theta) = \dfrac{1}{r^2}$ $f_3(r,\theta) = \tan\theta$ $f_4(r,\theta) = \theta$

5.

	$\mathcal{D}_{f_i}$	∂_x ∂^2_{xx}	∂^2_{xy}	∂_y ∂^2_{yy}
f_1	R^2	$16x^3y^2 - 6xy^3 + y$ $48x^2y^2 - 6y^3$	$8x^4 - 18x^2y$	$8x^4y - 9x^2y^2 + x - 1$ $32x^3y - 18xy^2 + 1$
f_2	$x + y \neq 0$	$2y/D^2$ $-4y/D^3$	$2(x-y)/D^3$	$-2x/D^2$ $4x/D^3$
f_3	R^2	$2x + y^2$ 2	$2y$	$2xy - 20y^3$ $2x - 60y^2$
f_4	R^2	$2xy\cos(x^2y)$ $2y\cos(x^2y) - 4x^2y^2\sin(x^2y)$	$2x\cos(x^2y) - 2x^3y\sin(x^2y)$	$x^2\cos(x^2y)$ $-x^4\sin(x^2y)$
f_5	R^2	$(\cos x + y\sin x)e^{xy}$ $(-\sin x + 2y\cos x + y^2\sin x)e^{xy}$	$(\sin x + x\cos x + xy\sin x)e^{xy}$	$(x\sin x)e^{xy}$ $(x^2\sin x)e^{xy}$
f_6	$R^2 \setminus (0,0)$	x/D $(y^2 - x^2)/D^2$	$-2xy/D^2$	y/D $(x^2 - y^2)/D^2$
f_7	$R^2 \setminus (0,0)$	$4xy^2/D^2$ $4y^2(-3x^2 + y^2)/D^3$	$8xy(x^2 - y^2)/D^3$	$-4x^2y/D^2$ $4x^2(-x^2 + 3y^2)/D^3$
f_8	$R^2 \setminus (0,0)$	$y(y^2 - x^2)/D^2$ $2xy(x^2 - 3y^2)/D^3$	$(-x^4 + 6x^2y^2 - y^4)/D^3$	$x(x^2 - y^2)/D^2$ $2xy(-3x^2 + y^2)/D^3$
f_9	R^2	$(-2x + y)/D^2$ $2(3x^2 - 3xy - 1)/D^3$	$(-3x^2 + 9xy - 3y^2 + 1)/D^3$	$(x - 2y)/D^2$ $2(3y^2 - 3xy - 1)/D^3$

6. $\dfrac{\partial f}{\partial d} = (3x+1)e^{x+y}$ $\dfrac{\partial g}{\partial d} = \dfrac{2(x+3y)}{(x+y)^2}$

7. continuité : facile

$f_x(x,y) = 2x \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - x(x^2+y^2)^{-1/2} \cos \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. f est donc C^1 sur $\boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
$f_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h \sin 1/|h| = 0$. Donc f_x est définie sur $\boldsymbol{R}^2$, continue sur $\boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pour regarder la continuité en $(0,0)$, on regarde par exemple $f_x(x,0)$, qui n'a pas de limite quand $x \to 0$. Donc f_x est discontinue en $(0,0)$.
Idem pour f_y par symétrie entre x et y.

8. En $(x,y) \neq 0$, f est C^1 et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$, et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$. En $(0,0)$ les dérivées partielles existent et sont nulles:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{h^3 \cdot 0}{h^2+0} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{0 \cdot h}{0+h^2} = 0$$

Pour montrer que la fonction est C^1, il faut montrer que les dérivées partielles sont continues en $(0,0)$, ce qui suit de

$$|y \frac{x^2}{x^2+y^2} \frac{x^2+3y^2}{x^2+y^2}| \leq 3|y|$$
$$|x \frac{x^2}{x^2+y^2} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}| \leq 2|x|$$

Comme les dérivées partielles sont nulles à l'origine, on a $\mathrm{d}f_{(0,0)}(h_1,h_2) = 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0$ donc $\mathrm{d}f_{(1,1)}(h_1,h_2) = h_1$.

9. $f_x(x,y,z) = \dfrac{2yz}{(x+y)^2}$ donne $f(x,y,z) = -\dfrac{2yz}{x+y} + g(y,z)$. $f_y(x,y,z) = \dfrac{-2xz}{(x+y)^2}$ donne $g(y,z) = g(z)$. Enfin f_z donne $g(z) = z+K$. Finalement :$f(x,y,z) = -\dfrac{2yz}{x+y} + z + K$.

L2 - UE MAT234

Analyse – Corrigé rapide de la feuille d'exercices n° 2

---

1. $f = cst$

2. $(f_x)_x = (f_x)_y = 0 \Rightarrow f_x = A, f_y = B$, pour des constantes A et B. $f = Ax + g(y) \Rightarrow f_y = g'(y) = B$ donc $g(y) = By + C$. Finalement f est affine, $f(x, y) = Ax + By + C$.

3. $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}) = 0$, donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = g(y)$. $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = g(y)$ donc $\frac{\partial f}{\partial y} = xg(y) + h(y)$.
Finalement, on a $f = xg_1(y) + h_1(y)$ (pour g_1, h_1 dérivables trois fois).

4. $g(u, v) = f(x, y)$
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial v}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial u} + 2\dfrac{\partial g}{\partial v}$. D'où:$\dfrac{\partial g}{\partial u} = 0$ et $g(u, v) = \phi(v)$.

5. $g(u, v) = f(x, y)$
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u} + 3\dfrac{\partial g}{\partial v}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2\dfrac{\partial g}{\partial v}$. D'où:$\dfrac{\partial g}{\partial u} = 3u^2/4 - uv/4$ et $g(u, v) = u^3/4 - u^2v/8 + \phi(v)$.

6. $g(u, v) = f(x, y)$
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = y\dfrac{\partial g}{\partial u} - y/x^2\dfrac{\partial g}{\partial v}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x\dfrac{\partial g}{\partial u} + 1/x\dfrac{\partial g}{\partial v}$. D'où: $u\dfrac{\partial g}{\partial u} - g + 1 = 0$. Résolution d'une équa diff du premier ordre: $g(u, v) = 1 + u\phi(v)$

7. $g(r, \theta) = f(x, y)$. L'EDP devient : $\dfrac{\partial g}{\partial r} = a$. D'où $g(r, \theta) = ar + b(\theta)$

8. $x = (u + v)/2$, $y = (v - u)/2$. D'où : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\right)$.
Idem pour $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, etc... D'où : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 0$. D'où en intégrant $f(u, v) = uG(v) + H(v)$, G et H étant C^2.

9. $\mathrm{du} = -\dfrac{y}{x^2}\,\mathrm{dx} + \dfrac{1}{x}\,\mathrm{dy}$ et $\mathrm{dv} = y\,\mathrm{dx} + x\,\mathrm{dy}$. D'où : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial g}{\partial u} + y\dfrac{\partial g}{\partial v}$. Etc. On arrive à : $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4y^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} - 2y/x\dfrac{\partial g}{\partial u}$. C'est à dire $4uvg_{uv} = 2ug_u$. D'où par intégration $g(u, v) = \sqrt{v}\phi(u) + C(v)$.

10. (a) $x^2y^2 = [(x - 1) + 1]^2[(y - 1) + 1]^2$
$= [(x - 1)^2 + 2(x - 1) + 1][(y - 1)^2 + 2(y - 1) + 1]$
$= 1 + 2(x - 1) + 2(y - 1) + (x - 1)^2 + 4(x - 1)(y - 1) + (y - 1)^2 + o(||h||^2)$
(b) $\sin(xy) = xy + o(|xy|^2) = xy + o(||(x, y)||^2)$
(c) $x^3y^2 - 2xy^4 + y^5 = 4 - 20(x - 1) + 20(y - 2) + 12(x - 1)^2 - 52(x - 1)(y - 2) + 33(y - 2)^2 + \ldots$

11. $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = x/r$, $\frac{\partial f}{\partial y} = y/r$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (r - x\frac{\partial f}{\partial x})/r^2 = y^2/r^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2/r^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -xy/r^3$.

En $(3,4)$, on a: $f = 5$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 3/5$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4/5$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 16/125$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 9/125$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -12/125$.

$$f(3+h_1, 4+h_2) = 5 + \frac{3}{5}h_1 + \frac{4}{5}h_2 + \frac{1}{2}\ \frac{16h_1^2 - 24h_1h_2 + 9h_2}{125} + o(||h||^2)$$

Ceci donne l'approximation $\sqrt{(3.1)^2 + (4.02)^2} \approx 5 + \frac{6(0.1)}{10} + \frac{8(0.02)}{10} = 5.076$, où l'erreur est donnée pour un certain $\theta \in]0,1[$ par

$$\frac{(y+\theta h_2)^2 h_1^2 - 2(x+\theta h_1)(y+\theta h_2)h_1h_2 + (x+\theta h_1)^2 h_2^2}{2\{(x+\theta h_1)^2 + (y+\theta h_2)^2\}^{3/2}}$$

$$= \frac{(yh_1 - xh_2)^2}{2\{(x+\theta h_1)^2 + (y+\theta h_2)^2\}^{3/2}} \le \frac{(yh_1 - xh_2)^2}{2r^3} \le \frac{||h||^2}{2r} = 0.00104$$

L2 - UE MAT234

Analyse – Corrigé rapide de la feuille d'exercices n° 3

1.

1. $f(x, y) = 4 - 2x^2 - y^2$. $\nabla f = (-4x, -2y)$, nul en $(0, 0)$. $4 - 2x^2 - y^2 \le 4$, donc $f(0, 0) = 4$ est un maximum global.

2. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. $\nabla f = (2x, 2y)$, nul en $(0, 0)$. $x^2 + y^2 - 1 \ge -1$, donc $f(0, 0) = -1$ est un minimum global.

3. $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 1 = (x - 1)^2 + y^2 - 2$. $\nabla f = (2x - 2, 2y)$, nul en $(1, 0)$. minimum global.

4. $f(x, y) = -x^2 + 2xy - 2y^2 - 4$. $\nabla f = (-2x + 2y, 2x - 4y)$, nul en $(0, 0)$. $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = -2$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 2$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = -4$, $s^2 - rt = -4 < 0$, et $r < 0$ donc $f(0, 0) = -4$ donne un maximum local (et global car $f(x, y) = -4 - (x - y)^2 - y^2$).

5. $f(x, y) = x - y^2 - x^3$. $\nabla f = (1 - 3x^2, -2y)$, nul en $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$. Max local en $(1/\sqrt{3}, 0)$, point de selle en $(-1/\sqrt{3}, 0)$. Comme $\lim_{x \to -\infty} f(x, y) = +\infty$, pas de maximum global.

6. $f(x, y) = 3x + 12y - x^3 - y^3$. $\nabla f = (3 - 3x^2, 12 - 3y^2)$, nul en $(\pm 1, \pm 2)$. Max. loc. en $(1, 2)$, min loc. en $(-1, -2)$, selle en $(-1, 2)$ et $(1, -2)$ (pas d'extrema globaux).

7. $f(x, y) = (x - y)^2 + x^3 + y^3$ $\quad f_x = 2(x - y) + 3x^2$, $f_y = 2(y - x) + 3y^2$. Un point critique doit alors vérifier $x^2 = -y^2$, ce qui donne $(0, 0)$ comme seule solution. On a d'autre part $f(x, x) = 2x^3$ qui n'a pas d'extremum en 0. Donc f n'a pas d'extremum.

8. $f(x, y) = (x - y)^2 + x^2 + y^2$ $\quad f_x = 2(x - y) + 2x$, $f_y = 2(y - x) + 2y$, d'où $(0, 0)$ comme seul point critique. f est positive, donc $(0, 0)$ est un minimum global.

9. $f(x, y) = -2(x - y)^2 + x^4 + y^4$ $\quad f_x = -4(x - y) + 4x^3$, $f_y = -4(y - x) + 4y^3$. Pour un point critique, on a $x^3 = -y^3$, donc $x = -y$, ce qui donne les solutions $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
   - $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$: on calcule $r = t = 20$ et $s = 4$, donc f a un minimum local.
   - $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$: idem.
   - $(0, 0)$: $f(x, x) = 2x^4 > 0$ au voisinage de 0, et $f(x, -x) = 2x^2(x^2 - 8) < 0$ au voisinage de 0. Donc f n'a pas d'extremum en $(0, 0)$.

2.

1. $x^2 \ge 0$ donc 0 est un minimum global, non strict.

2. $(0, 0)$ est un point de selle pour xy.

3. $x^2 - 4y^2 = (x-2y)(x+2y) = uv$ (changement de variables $u = x - 2y$, $v = x + 2y$), donc pt de selle.

4. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $\nabla f = (2x + y, x + 2y)$, $r = 2$, $s = 1$, $t = 2$, $s^2 - rt = -3 < 0$, $r > 0$, minimum local, qui est aussi global.

5. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$, $r = 2$, $s = -1$, $t = 2$, minimum global.

3. $\nabla f(1,1,1) = (4,2,1)$, et comme $\mathrm{D}_u f(a) = \nabla f(a) \cdot u$, $u = (4,2,1)/\sqrt{21}$ donne la dérivée maximale, $u = -(4,2,1)/\sqrt{21}$ la dérivée directionnelle minimale.

4. $\nabla f = (2ax + by, bx + 2cy)$, $r = 2a$, $s = b$, $t = 2c$. $s^2 - rt = b^2 - 4ac$, négatif si et seulement si on a un extremum.

5. $f(\theta) = \cos(\theta)^4 + \sin(\theta)^4$, on a $f(-\theta) = f(\theta) = f(\pi - \theta) = f(\frac{\pi}{2} - \theta)$, donc il suffit de chercher le max et le min sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, et sur cet intervalle, la dérivée

$$f'(\theta) = 2\sin(2\theta)(2\sin^2(\theta) - 1)$$

ne s'annule qu'aux extrémités $\theta = 0, \frac{\pi}{4}$. $\max f = f(0) = 1$, $\min f = f(\pi/4) = 1/2$.

Sur $x^4 + y^4 = 1$, i.e. $r^4(cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) = 1$, on a

$$x^2 + y^2 = r^2 = \frac{1}{\sqrt{\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)}}$$

qui est maximale quand $f(\theta)$ est minimale. Valeur maximale: $1/\sqrt{1/2} = \sqrt{2}$; val. min: 1.

6. 1. Il s'agit de minimiser l'erreur $E(a,b,c) = \sum_i (ax_i + by_i + c - z_i)^2$. Le point critique de E est solution du système :

$$(\sum x_i^2)a + (\sum x_i y_i)b + (\sum x_i)c = (\sum x_i z_i)$$

$$(\sum x_i y_i)a + (\sum y_i^2)b + (\sum y_i)c = (\sum y_i z_i)$$

$$(\sum x_i)a + (\sum y_i)b + nc = (\sum z_i).$$

2. Sur l'exemple, on trouve $a = 333/395$, $b = -724/395$ et $c = 482/395$.

7. 1. Pour le modèle linéaire on doit résoudre le système :

$$(\sum x_i)a + nb = (\sum y_i)$$

$$(\sum x_i^2)a + (\sum x_i)b = (\sum x_i y_i).$$

On trouve $a = 73/49$ et $b = 14,5/14$. L'erreur commise est:

$$E_1 = \sum_i (ax_i + b - y_i)^2 = (\sum x_i^2)a^2 + nb^2 + (\sum y_i^2) + 2ab(\sum x_i) - 2a(\sum x_i y_i) - 2b(\sum y_i),$$

soit ici $E_1 = 293/196$.

2. c et d sont solutions du système :

$$(\sum x_i\sqrt{x_i})c + (\sum x_i)d = (\sum y_i\sqrt{x_i})$$

$$(\sum x_i^2)c + (\sum x_i\sqrt{x_i})d = (\sum x_iy_i).$$

On trouve $c = 69/76$ et $d = 151/76$. L'erreur est ici :

$$E_2 = \sum_i (cx_i + d\sqrt{x_i} - y_i)^2$$

$$= (\sum x_i^2)c^2 + (\sum x_i)d^2 + (\sum y_i^2) + 2cd(\sum x_i\sqrt{x_i}) - 2c(\sum x_iy_i) - 2d(\sum y_i\sqrt{x_i}),$$

soit $E_2 = 11/19$.

Comme $E_2 < E_1$, le modèle non linéaire est le meilleur.

L2 - UE MAT234

Analyse – Corrigé rapide de la feuille d'exercices n° 4

1.

$$
\begin{array}{rcl}
I_1 &=& 3\left[4y-\frac{y^3}{3}\right]_0^2 &=& 16.\\
I_2 &=& \left(\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^3\right)\cdot\left(\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-2}^0\right) &=& 0.\\
I_3 &=& \pi\left(\int_\pi^{2\pi}\sin x\ dx+\int_0^{2\pi}\cos y\ dy\right) &=& -2\pi.\\
I_4 &=& \int_0^\pi x(1-\cos x)\ dx &=& \frac{\pi^2}{2}+2.\\
I_5 &=& \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{2}\ dx &=& \frac{\pi}{4}.\\
I_6 &=& \int_1^{\ln 8}(y-e)e^y\ dy &=& 8\ln 8-8e-8+e^2.\\
I_7 &=& \int_{[0,\frac{\pi}{2}]^2}(\sin(y+z)+\cos(y+z))\ dydz &=& \int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos z\ dz=2.
\end{array}
$$

2.

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{A}(D_1) &=& 2\pi\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-z}} r\ dr\right)\ dz &=& \frac{\pi}{2}.\\
\mathcal{A}(D_2) &=& 2\pi\int_{-1}^1\left(\int_0^{\sqrt{1-z^2}} r\ dr\right)\ dz &=& \frac{4\pi}{3}.\\
\mathcal{A}(D_3) &=& \int_0^1\left(\int_x^{2-x}(x^2+y^2)\ dy\right)\ dx\\
&=& \int_0^1(2-2x)x^2\ dx+\frac{1}{3}\int_0^1\left((2-x)^3-x^3\right)\ dx\\
&=& \left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{2}\right]_0^1-\left[\frac{(2-x)^4}{12}+\frac{x^4}{12}\right]_0^1 &=& \frac{4}{3}.
\end{array}
$$

3.

$$
\begin{array}{rcl}
I_1 = & \left(\int_0^1 r^4\ dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos^2\theta\ d\theta\right) & = 0.\\
I_2 = & \int_0^1\left[\int_0^{1-x}xy\ dy\right]dx=\int_0^1 x\frac{(1-x)^2}{2}dx & = \dfrac{1}{24}.\\
I_3 = & \int_0^1\left[\int_{x^2}^x x^2\ dy\right]dx=\int_0^1(x-x^2)x^2dx & = \dfrac{1}{20}.
\end{array}
$$

Pour I_4, $(x,y)\in D=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\le 1, x+y\ge 1, x\ge y\}$ si et seulement si $(X,Y)=(x+y,x-y)\in D'=\{(X,Y)\in R^2 \mid X^2+Y^2\le 2, X\ge 1, Y\ge 0\}$.

La formule de changement de variable donne

$$\begin{aligned}
I_4 &= \iint_{D'} XYe^{(x^2-Y^2)/4}(\frac{1}{2})dX\ dY \\
&= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}}\left[\int_0^{\sqrt{2-X^2}} Ye^{-Y^2/4}dY\right] Xe^{X^2/4}dX \\
&= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} 2\left(-Xe^{-\frac{1+X^2}{2}} + Xe^{X^2/4}\right)dX \\
&= e + e^{1/2} - 2e^{1/4}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_5 &= \iint_{[0,\sqrt{\pi}]\times[0,\pi/4]} r\cos(\theta)\cos(r)rdr\ d\theta \\
&= \left(\int_0^{\sqrt{\pi}} r^2\cos(r)dr\right)\left(\int_0^{\pi/4}\cos(\theta)\ d\theta\right) = -\sqrt{2}\pi.
\end{aligned}$$

4.

1. $$I_a = \iint_{[0,a]\times[0,2\pi]} e^{-r^2}rdr\ d\theta = \left(\int_0^a e^{-r^2}rdr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = \pi(1-e^{-a^2})$$

2. la fonction intégrée est positive et $D_a \subset C_a \subset D_{\sqrt{2}a}$.

3. $$J_a = \iint_{[0,a]^2} e^{-(x^2+y^2)}dx\ dy = \left(\int_{-a}^a e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-a}^a e^{-y^2}dy\right) = \left(\int_{-a}^a e^{-x^2}dx\right)^2$$
   converge vers $\pi = \lim_{a\to+\infty} I_a$ d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

5.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \textstyle\int_0^1 \frac{x-1}{x+1}\sqrt{x}\ dx = 2\int_0^1 \frac{u(u^2-1)}{u^2+1}\ du = \frac{2}{3} + 4\mathrm{Arctan}(1) = \pi + \frac{2}{3}. \\
I_2 &= R^2\textstyle\int_0^{2\pi}\left(-(2\cos\theta - \sin\theta)\sin\theta + (\cos\theta+\sin\theta)\cos\theta\right)\ d\theta \\
&= R^2\textstyle\int_0^{2\pi}\left(1-\sin\theta\cos\theta\right)\ d\theta = 2\pi R^2. \\
I_3 &= 0.
\end{aligned}$$

(circulation d'un champ de gradient sur une courbe fermée)

6

1. Se déduit du théorème de Green-Riemann avec $Q(x,y) = \frac{x}{2}$ et $P(x,y) = -\frac{y}{2}$.

2. $$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(ab\cos^2\theta + ab\sin^2\theta\right)\ d\theta = ab\pi.$$

Analyse – Corrigé rapide de la feuille d'exercices n° 5

1.

$$(\text{grad } f)(x,y) = 2x\ \mathbf{i} + 2y\ \mathbf{j} = 2r\ \mathbf{u_r}, \qquad \Delta f(x,y) = 4.$$

$$(\text{grad } g)(x,y) = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\ \mathbf{i} - \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}\ \mathbf{j} = -\frac{\sin\theta}{r}\ \mathbf{u}_\theta,$$

$$\Delta g(x,y) = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = -\frac{\cos\theta}{r^2}.$$

2.

div $V(x,y,z) = (2+3x^2)e^{2z}\sin y$,

rot $V = 0$ (V est un champ de gradient).

div $W(r,\theta,z) = \sin\theta + 1$, rot $W(r,\theta,z) = \cos\theta\ \mathbf{k}$

3.

$$\begin{aligned}
\text{div}(fV) &= \frac{\partial(f.V_1)}{\partial x} + \frac{\partial(f.V_2)}{\partial y} + \frac{\partial(f.V_3)}{\partial z} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}.V_1 + \frac{\partial f}{\partial y}.V_2 + \frac{\partial f}{\partial z}.V_3\right) + f.\left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}\right). \\
\text{div}(\text{grad} f) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right). \\
\text{rot}(\text{grad} f) &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)\mathbf{k} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

4. $\Delta f_\alpha(x,y,z) = 2\alpha(2\alpha+1)(x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1}$.

On en déduit que le laplacien de f_α est identiquement nul pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Attention : faire le calcul à part pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$.