Université de Grenoble I Année 2014-2015

Module MAT 234

CC2 : examen partiel du 11 décembre 2014

Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée

Calculettes, téléphones portables interdits

Durée 1h30

Exercice 1 – [*Les questions 1 et 2 sont indépendantes des suivantes.*] Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \mathbb{1}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $a, b \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$M = M_{ab} = aA + bB = \begin{pmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de la matrice M en fonction des paramètres a et b. Le résultat sera donné sous forme factorisée et les différentes étapes seront précisément justifiées.
   Indication : *on pourra commencer par effectuer les transformations* $C_i := C_i - C_1$ *pour* $i = 2, 3, 4$.
2. Pour quelles valeurs des paramètres la matrice M est-elle inversible ?
3. Déterminer une base du noyau $\mathrm{Ker}(A)$ de la matrice A. On notera $v_1, v_2, \ldots$ les vecteurs de cette base [*la première composante de chacun de ces vecteurs sera choisie égale à 1*]. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(A)$.
4. Déterminer une base de l'image $\mathrm{Im}(A)$ de la matrice A. On notera $w_1, w_2, \ldots$ les vecteurs de cette base.
5. Résoudre le système linéaire $AX = b$ dans chacun des cas suivants (on donnera précisément l'ensemble des solutions) :
   a) $b_1 = (1, 2, 3, 4)$,
   b) $b_2 = (-4, -4, -4, -4)$.
6. Vérifier que les vecteurs v_i et w_j (ensemble des vecteurs de la base du noyau et de l'image de A) forment une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$.
7. On note f l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A. Calculer l'image par f des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$. En déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
8. Calculer les 2 matrices de passage entre la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ et la base $\mathcal{B}'$ (*indépendamment du nom de ces matrices, on précisera bien ce que représentent les colonnes de chacune de ces matrices*).
9. Retrouver la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ à l'aide des matrices de passage.

Exercice 2 –

1. Si A est une matrice réelle de dimension n, donner la relation entre $\det(-A)$ et $\det(A)$.
2. On suppose que la dimension n est un nombre impair. Soit A une matrice antisymétrique, c'est à dire telle que $A^{\mathrm{t}} = -A$. Prouver que $\det(A) = 0$.
   Indication : *on pourra se servir de la réponse à la question précédente*
3. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -8 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -8 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 8 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 8 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

   Indication : *il est possible de se réduire à la situation du point 2. en opérant des factorisations sur les colonnes.*

Exercice 3 – On considère les points suivants du plan :

$$\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,4} = \{(-1,1),(0,1),(1,0),(2,-2)\}.$$

Rappelons que l'équation d'une parabole est donnée par :

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Le but de cet exercice est de déterminer la parabole (si elle existe) qui passe par les points (x_i, y_i) donnés.

1. Ecrire les 4 équations associées à ces points : $y_i = ax_i^2 + bx_i + c$.
2. Montrer que ce système d'équations a une solution et donner l'équation de la parabole cherchée.
3. Tracer un graphique avec les points donnés.

Exercice 4 –

On considère une boule $\mathcal{B}$ centrée à l'origine et de rayon R.

Déterminer la masse M de cette boule $\mathcal{B}$ sachant que sa masse volumique ρ est variable (dépend du point considéré) et est donnée par la fonction

$$\rho(x, y, z) = e^{-\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}.$$