Université de Grenoble I Année 2014-2015
Module MAT 234

CC2 : examen partiel du 11 décembre 2014 — CORRIGÉ

Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée

Calculettes, téléphones portables interdits

Durée 1h30

Exercice 1 – [*Les questions 1 et 2 sont indépendantes des suivantes.*] Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \mathbb{1}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $a, b \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$M = M_{ab} = aA + bB = \begin{pmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de la matrice M en fonction des paramètres a et b. Le résultat sera donné sous forme factorisée et les différentes étapes seront précisément justifiées.
   Indication : *on pourra commencer par effectuer les transformations* $C_i := C_i - C_1$ *pour* $i = 2, 3, 4$.
2. Pour quelles valeurs des paramètres la matrice M est-elle inversible ?
3. Déterminer une base du noyau $\mathrm{Ker}(A)$ de la matrice A. On notera $v_1, v_2, \ldots$ les vecteurs de cette base [*la première composante de chacun de ces vecteurs sera choisie égale à 1*]. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(A)$.
4. Déterminer une base de l'image $\mathrm{Im}(A)$ de la matrice A. On notera $w_1, w_2, \ldots$ les vecteurs de cette base.
5. Résoudre le système linéaire $AX = b$ dans chacun des cas suivants (on donnera précisément l'ensemble des solutions) :
   a) $b_1 = (1, 2, 3, 4)$,
   b) $b_2 = (-4, -4, -4, -4)$.
6. Vérifier que les vecteurs v_i et w_j (ensemble des vecteurs de la base du noyau et de l'image de A) forment une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$.
7. On note f l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A. Calculer l'image par f des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$. En déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
8. Calculer les 2 matrices de passage entre la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ et la base $\mathcal{B}'$ (*indépendamment du nom de ces matrices, on précisera bien ce que représentent les colonnes de chacune de ces matrices*).
9. Retrouver la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ à l'aide des matrices de passage.

Corrigé.

1. On effectue les transformations $C_i := C_i - C_1$ pour $i = 2, 3, 4$, puis $L_1 := L_1 + L_2 + L_3 + L_4$:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & -b & -b & -b \\ a & b & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4a+b & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = (4a+b)\, b^3.$$

2. La matrice M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0 \Leftrightarrow \Big(4a + b \neq 0 \text{ et } b \neq 0\Big)$.

3. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + y + z + t = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} x & = & -y & -z & -t \\ y & = & y & & \\ z & = & & z & \\ t & = & & & t \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{de sorte que } \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\Big\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Big\},$$

car les trois vecteurs v_1, v_2, v_3 sont linéairement indépendants. La dimension du noyau de la matrice A est 3, de sorte que $\dim\Big(\mathrm{Im}(A)\Big) = 1$ d'après le théorème du rang.

4. Les vecteurs colonnes de la matrice A forment une famille génératrice de l'espace image $\mathrm{Im}(A)$. Celui-ci étant de dimension 1, on déduit que

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\Big\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}.$$

5. a) Clairement $b_1 = (1,2,3,4) \notin \mathrm{Im}(A)$, de sorte que le système linéaire $AX = b$ n'admet pas de solution.
b) Ici $b_2 = (-4,-4,-4,-4) = -4\,.\,(1,1,1,1) \in \mathrm{Im}(A)$, de sorte que le système linéaire $AX = b$ admet des solutions. Ces solutions s'écrivent comme somme d'une solution particulière et d'un élément du noyau de A. Remarquant que $X_0 = (-1,-1,-1,-1)$ est solution particulière du système linéaire $AX = b$, on déduit que l'ensemble des solutions du système $AX = b$ est exactement
$$X = X_0 + \mathrm{Ker}(A).$$

6. $\det(v_1, v_2, v_3, w_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ donne le résultat.

7. Par définition, $f(v_i) = 0$ pour $i = 1,2,3$. Par ailleurs, un calcul direct à l'aide de la matrice A donne $f(w_1) = 4\,w_1$, de sorte que
$$A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \left(\begin{array}{cccc|c} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) & f(w_1) & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & w_1 \end{array}\right).$$

8. Les matrices de passages sont données par :
$$P = \left(\begin{array}{cccc|c} v_1 & v_2 & v_3 & w_1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & e_1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & e_2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & e_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & e_4 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{4}\left(\begin{array}{cccc|c} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & \\ \hline 1 & -3 & 1 & 1 & v_1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & v_2 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & v_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & w_1 \end{array}\right).$$

9. L'application de la formule de changement de base pour une application linéaire donne
$$A' = P^{-1}\,A\,P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 –

1. Si A est une matrice réelle de dimension n, donner la relation entre $\det(-A)$ et $\det(A)$.
2. On suppose que la dimension n est un nombre impair. Soit A une matrice antisymétrique, c'est à dire telle que $A^t = -A$. Prouver que $\det(A) = 0$.
<u>Indication</u> : *on pourra se servir de la réponse à la question précédente*
3. Calculer le déterminant suivant :
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -8 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -8 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 8 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 8 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$
<u>Indication</u> : *il est possible de se réduire à la situation du point 2. en opérant des factorisations sur les colonnes.*

<u>Corrigé</u>.

1. La matrice $-A$ est obtenue en multipliant chaque colonne de A par (-1). Il y a n colonnes, donc $\det(A) = (-1)^n \det(-A)$.
2. On note $n = 2k+1$. On a $\det(A^t) = \det(A)$ et par hypothèse $\det(A^t) = \det(-A)$, donc
$$\det(A) = \det(-A).$$
Mais la réponse à la question précédente nous dit que
$$\det(A) = (-1)^{2k+1}\det(-A) = -\det(-A).$$
On a donc $\det(A) = -\det(A)$, d'où $\det(A) = 0$.
3. On a
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -8 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -8 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 8 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 8 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 0 & -1 & -8 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -8 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 8 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 8 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2)8\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$
ou le dernier déterminant est égal à 0 car c'est le déterminant d'une matrice antisymmétrique en dimension impaire.

Exercice 3 – On considère les points suivants du plan :

$$\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,4} = \{(-1,1), (0,1), (1,0), (2,-2)\}.$$

Rappelons que l'équation d'une parabole est donnée par :

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Le but de cet exercice est de déterminer la parabole (si elle existe) qui passe par les points (x_i, y_i) donnés.

1. Ecrire les 4 équations associées à ces points : $y_i = ax_i^2 + bx_i + c$.
2. Montrer que ce système d'équations a une solution et donner l'équation de la parabole cherchée.
3. Tracer un graphique avec les points donnés.

Corrigé.

1. Le système cherché est

$$\begin{aligned} 1 &= a - b + c && (1)\\ 1 &= c && (2)\\ 0 &= a + b + c && (3)\\ -2 &= 4a + 2b + c && (4) \end{aligned}$$

2. (a) Substitution. (2) dans (1) : $a = b$. Dans (3) : $a = b = -1/2$. Dans (4) $-2 = -2$ (ok).

   (b) Pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

$L_4 - L_1 - 3L_3 + 3L_2 \to L_4, \quad L_3 - L_1 \to L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$L_3 \leftrightarrow L_2$:

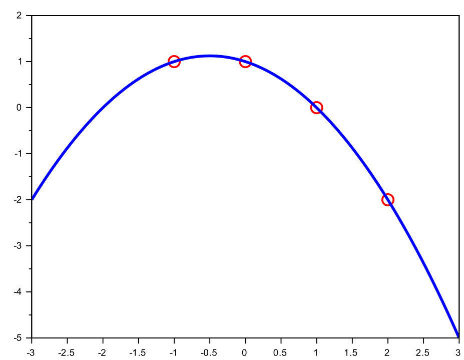
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Donc $c = 1$, $a = b = -1/2$.

Dans les deux cas l'existence de la solution suit directement de la méthode (ne pas oublier de vérifier la quatrième équation pour la méthode de substitution). L'équation de la parabole est alors

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1.$$

3.



Exercice 4 –

On considère une boule $\mathcal{B}$ centrée à l'origine et de rayon R.

Déterminer la masse M de cette boule $\mathcal{B}$ sachant que sa masse volumique ρ est variable (dépend du point considéré) et est donnée par la fonction

$$\rho(x,y,z) = e^{-\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}.$$

Corrigé.

La masse M de la boule $\mathcal{B}$ est obtenue par l'intégration $M = \iiint_{\mathcal{B}} \rho(x,y,z)\, dxdydz$.

La géométrie du domaine d'intégration nous incite à effectuer un changement de variables en coordonnées sphériques, ce qui conduit directement à

$$\begin{aligned} M &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{r=0}^{R} e^{-r^3}\left(r^2\,\sin(\varphi)\right) drd\varphi d\theta\\ &= \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_{\varphi=0}^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_{r=0}^{R} r^2\,e^{-r^3}\,dr\right)\\ &= 2\pi\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi}\left[-\frac{1}{3}e^{-r^3}\right]_0^{R}\\ &= \frac{4\pi}{3}\,(1 - e^{-R^3}). \end{aligned}$$