Université de Grenoble I Année 2015-2016

Module MAT 234

CC2 : examen partiel du 5 novembre 2015 — CORRIGÉ

Exercice 1. –

On propose de résoudre sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ l'équation aux dérivées partielles

$$y\,\frac{\partial f}{\partial x} - x\,\frac{\partial f}{\partial y} = x\,\sqrt{x^2+y^2}. \tag{1}$$

à l'aide d'un changement de variables en coordonnées polaires (r,θ). On note g la fonction définie par $g(r,\theta) = f\big(x(r,\theta), y(r,\theta)\big)$.

1. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction des dérivées partielles de f.
2. En déduire les dérivées partielles de f en fonction des dérivées partielles de g.
3. En déduire la nouvelle équation aux dérivées partielles que doit satisfaire la fonction g.
4. Résoudre l'équation aux dérivées partielles (1).

Corrigé.

1. Avec $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, la règle de dérivation en chaine donne
$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\\ \frac{\partial g}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta)\end{aligned}$$
2. Par combinaison (de type “Gauss”) de ces 2 équations on obtient
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sin\theta\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\end{aligned}$$
3. On reporte dans l'EDP initiale :
$$(r\sin\theta)\Big(\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\Big) - (r\cos\theta)\Big(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\Big) \;=\; (r\cos\theta)\,r$$
ce qui conduit après simplification à
$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = -(r\cos\theta)\,r = -r^2\cos\theta.$$
4. Ainsi, $g(r,\theta) = -r^2\sin\theta + H(r)$, avec H de classe C^1 et finalement $f(x,y) = -y\sqrt{x^2+y^2} + H(\sqrt{x^2+y^2})$.

Exercice 2 –

On considère le domaine Δ de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\Delta = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y \geq x,\, y \geq -x,\, x^2+y^2 \leq 1\}$$

et la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

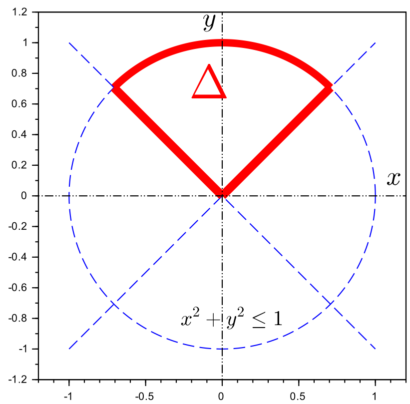
$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}.$$

1. Tracer les lignes de niveau $L_{1/e}$, L_1 et L_2 de la fonction f.
2. Répresenter graphiquement le domaine Δ.
3. Calculer l'intégrale
$$I = \iint_\Delta e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$
à l'aide d'un changement de variables approprié.
4. Calculer le volume du domaine de $\mathbb{R}^3$ donné par
$$D = \{(x,y,z) \mid 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2},\, (x,y)\in\Delta\}.$$

Corrigé.

1. La ligne de niveau k est définie par $L_k = \Big\{(x,y) \in D_f = \mathbb{R}^2,\ e^{-(x^2+y^2)} = k\Big\}$. L'exponentielle étant strictement positive on se limite aux valeurs de $k > 0$. Puis, $e^{-(x^2+y^2)} = k \Leftrightarrow (x^2+y^2) = \ln(\frac{1}{k})$, de sorte que

$$\begin{array}{ccccl} 0 < k < 1 & \Leftrightarrow & \frac{1}{k} > 1 \Leftrightarrow \ln(\frac{1}{k}) > 0 & : & L_k \text{ est le cercle centré à l'origine et de rayon } (\ln \frac{1}{k})^{1/2}, \\ & & & & \text{en particulier } L_{1/e} \text{ est le cercle unité,} \\ k = 1 & \Leftrightarrow & \frac{1}{k} = 1 \Leftrightarrow \ln(\frac{1}{k}) = 0 & : & L_1 = \{(0,0)\}, \\ k > 1 & \Leftrightarrow & \frac{1}{k} < 1 \Leftrightarrow \ln(\frac{1}{k}) < 0 & : & L_k = \emptyset, \text{ en particulier } L_2 = \emptyset. \end{array}$$

2. 

3. Cette intégrale double correspond au calcul du volume du domaine de $\mathbb{R}^3$ situé “au dessus” de Δ et “sous” le graphe de la fonction f. La géométrie du domaine d'intégration nous incite à effectuer un changement de variables en coordonnées polaires, ce qui conduit directement à

$$\begin{aligned} I = &= \iint_\Delta e^{-(x^2+y^2)} dxdy \\ &= \iint_{\Delta'} e^{-r^2} r\, drd\theta \qquad \text{avec } \Delta' = \Big\{(r,\theta),\ 0 \le r \le 1,\ \pi/4 \le \theta \le 3\pi/4\Big\} \\ &= \Big(\int_{\theta=\pi/4}^{\theta=3\pi/4} d\theta\Big) \cdot \Big(\int_{r=0}^{r=1} re^{-r^2} dr\Big) \\ &= \Big[\theta\Big]_{\pi/4}^{3\pi/4} \cdot \Big[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4}(1 - \frac{1}{e}). \end{aligned}$$

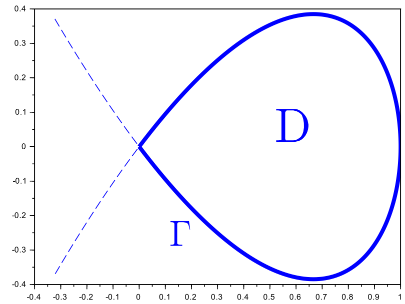
4. Le domaine D correspond à la région de $\mathbb{R}^3$ située “au dessus” de Δ et “sous” le graphe de la fonction $(x,y) \mapsto 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ qui est bien définie sur Δ. Le calcul du volume de D est identique à celui de la question précédente : nous effectuons à nouveau un changement de variables en coordonnées polaires, ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(D) &= \iint_\Delta \big(1 - \sqrt{x^2+y^2}\big)\, dxdy \\ &= \iint_{\Delta'} (1-r)r\, drd\theta \qquad \text{avec } \Delta' = \Big\{(r,\theta),\ 0 \le r \le 1,\ \pi/4 \le \theta \le 3\pi/4\Big\} \\ &= \Big(\int_{\theta=\pi/4}^{\theta=3\pi/4} d\theta\Big) \cdot \Big(\int_{r=0}^{r=1} (r - r^2)\, dr\Big) \\ &= \Big[\theta\Big]_{\pi/4}^{3\pi/4} \cdot \Big[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\Big]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

Exercice 3 –
On considère le champ de vecteurs F de $\mathbb{R}^2$ défini par
$F\ :\quad (x,y)\quad \mapsto\quad \Big(P(x,y)=y,\ Q(x,y)=x\Big)$
ainsi que la courbe plane Γ, représentée en gras sur la figure ci-contre, et décrite dans le sens trigonométrique par les équations paramétriques

$$x(t)=1-t^2,\quad y(t)=t-t^3 \qquad \text{pour } t\in[-1,1].$$

On note D l'aire délimitée par cette courbe Γ.



1. Calculer l'intégrale curviligne
$$C\ =\ \int_\Gamma P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy.$$
2. Calculer l'aire A du domaine D à l'aide de la formule de Green Riemann.

Corrigé. Remarquons que champ de vecteurs F est de classe C^1 et que le chemin Γ est de classe C^1 par morceaux, ce qui permet d'utiliser les résultats du cours.

1. Il s'agit ici d'un calcul direct et élémentaire.
$$\begin{aligned}C&=\int_\Gamma P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_\Gamma y\,dx+x\,dy\\&=\int_{-1}^{1}\Big(y(t)\,x'(t)+x(t)\,y'(t)\Big)\,dt\\&=\int_{-1}^{1}\Big((t-t^3)(-2t)+(1-t^2)(1-3t^2)\Big)\,dt\\&=\int_{-1}^{1}(1-6t^2+5t^4)\,dt=\Big[t-2t^3+t^5\Big]_{-1}^{1}=0.\end{aligned}$$
2. La formule de Green-Riemann permet d'écrire
$$\begin{aligned}A&=\iint_D dxdy=\frac{1}{2}\int_\Gamma x\,dy-y\,dx=\int_\Gamma x\,dy=\int_\Gamma(-y)\,dx\qquad\text{(formules vues en cours)},\\&=\int_{-1}^{1}x(t)\,y'(t)\,dt\qquad\text{avec par exemple la deuxième formule,}\\&=\int_{-1}^{1}(1-t^2)\,(1-3t^2)\,dt\\&=\int_{-1}^{1}(1-4t^2+3t^4)\,dt=\Big[t-\frac{4}{3}t^3+\frac{3}{5}t^5\Big]_{-1}^{1}=\frac{8}{15}.\end{aligned}$$

Exercice 4 –
Montrer que la forme différentielle

$$(dx,dy)\quad\mapsto\quad\big(2xy+y^2\big)\,dx+\big(x^2+2xy+3y^2\big)\,dy$$

est la différentielle d'une fonction de classe C^2 que l'on déterminera.

Corrigé. On intègre successivement par rapport à x puis par rapport à y.

a) $\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)=2xy+y^2\ \Rightarrow\ f(x,y)=x^2y+xy^2+h(y)$, avec h de classe C^2

b) $\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)=x^2+2xy+3y^2\quad\Leftrightarrow\quad\dfrac{\partial}{\partial y}\big(x^2y+xy^2+h(y)\big)=x^2+2xy+3y^2$, en utilisant a)
$\Rightarrow\ x^2+2xy+h'(y)=x^2+2xy+3y^2\ \Rightarrow\ h'(y)=3y^2\ \Rightarrow\ h(y)=y^3+k,\ k\in\mathbb{R}.$

Finalement, $f(x,y)=x^2y+xy^2+y^3+k,\ k\in\mathbb{R}.$