Université Joseph Fourier - Grenoble I Année 2012-2013
Module MAT 234

Partiel du mardi 4 décembre 2012

Tous documents et notes manuscrites interdits.
Calculettes, téléphones portables interdits.

Durée 1h30

Exercice 1 – [*6 points*]

On considère le domaine Δ de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \; x^2+y^2-1 \geq 0,\; x^2+y^2-2 \leq 0,\; x-y \geq 0,\; y \geq 0\}$$

ainsi que la fonction $f : (x,y) \mapsto x^3 y(x^2+y^2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On vérifie aisément et on admettra que f est positive sur Δ.

Le but de cet exercice est de calculer le volume V du domaine

$$\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } \; (x,y) \in \Delta\,,\; 0 \leq z \leq f(x,y)\}\,.$$

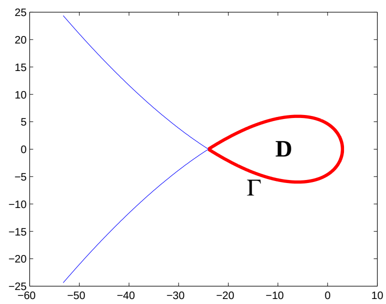
1. Donner une représentation graphique *précise et commentée* du domaine Δ.
2. Décrire le domaine Δ en fonction des coordonnées polaires r, θ.
3. Donner l'expression du volume $V = \mathrm{Vol}(\mathcal{D})$ sous forme d'une intégrale double.
4. Calculer l'intégrale V. — *On donne l'aide :* $[(\cos\theta)^n]' = -n[\cos\theta]^{n-1}\sin\theta$.

Exercice 2 – [*4 points*]

On considère la courbe plane paramétrée par $t \in \mathbb{R} \mapsto (x(t), y(t))$ avec

$$x(t) = a(1-3t^2), \quad y(t) = a\,t(3-t^2),$$

où a est un paramètre réel.



On souhaite déterminer l'aire A du domaine D délimité par la boucle Γ, représentée en gras sur la figure, et qui est précisément décrite dans le sens trigonométrique pour $t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

1. Calculer les éléments différentiels $\mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}y = y'(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Donner une expression de l'aire A à l'aide de la formule de Green Riemann.
3. Calculer A en fonction du paramètre a.

Exercice 3 – [*10 points*]

On considère l'espace $I\!R^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

1. Montrer que les vecteurs $u_1 = (3, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$, $u_3 = (1, 0, 1)$ forment une base $\mathcal{B}'$ de $I\!R^3$.

2. Déterminer l'expression des vecteurs e_1, e_2, e_3 en fonction des vecteurs u_1, u_2, u_3.

3. En déduire les matrices de passage P et P^{-1} entre les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. *On précisera pour chaque matrice la signification des colonnes, comme dans le cours.*

4. On donne le vecteur $V = (1, 1, 1)$ dans la base canonique $\mathcal{B}$. Déterminer ses composantes dans la base $\mathcal{B}'$.

On considère maintenant l'application linéaire $f : I\!R^3 \mapsto I\!R^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Déterminer la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.

6. Déterminer sans calcul le noyau Ker$f$ de f, dont on donnera une base.

7. On donne les vecteurs $b = (2, 0, 2)$ et $X_0 = (1, 0, 1)$, exprimés dans la base canonique $\mathcal{B}$. Déterminer l'image du vecteur X_0 par f.

8. Donner l'ensemble des solutions du système linéaire $AX = b$.