

Documents, calculatrices, ordinateurs et téléphones portables interdits.

MATHEMATIQUES

Durée: 1 h30

Exercice 1.

1) Soit $T = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$

Calculer l'intégrale double

$$\iint_T \sin(x + y) dx dy$$

2) Soit $D = \{(x, y) | x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

En passant en coordonnées polaires, calculer l'intégrale double

$$\iint_D xy^2 dx dy$$

Exercice 2. Soit a un réel et $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application de matrice par rapport à la base canonique

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

1) Calculer le déterminant $\Delta(a) = \det(M_a)$ en fonction du paramètre réel a .

2) Pour quels a a-t-on $\Delta(a) = 0$?

3) Pour quels a a-t-on $\ker f = \{0\}$?

4) Déterminer $\ker f$ dans les autres cas.

5) Quel est le rang $r(a)$ de la matrice M_a en fonction de a ?

6) Pour $a = 1$, résoudre les systèmes

$$f(x, y, z) = (1, 2, 3) \quad (S_1) \quad \text{et} \quad f(x, y, z) = (1, 1, 2) \quad (S_2)$$

où x, y, z sont les inconnues.

Exercice 3 .

1) Dans \mathbb{R}^3 soient $u = (1, 2, 1)$, puis $v = (2, 1, 2)$ et $w = (7, -3, 7)$. Soit E le sous espace vectoriel engendré par $\{u, v, w\}$. Quelle est la dimension de E ? Donner une base de E .

2) Soit $\tau = (3, 0, -3)$. Montrer que $\{u, v, \tau\}$ est une base de \mathbb{R}^3 . Quelle est la matrice de passage P de la base canonique à la base $\{u, v, \tau\}$?

3) Soit $Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$. Calculer le produit PQ .

4) Soit \mathcal{L} l'application linéaire dont la matrice dans la base $\{u, v, \tau\}$ est $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Quelle est la matrice représentant \mathcal{L} dans la base canonique ?