MAT 234. Contrôle Continu du Jeudi 3 Décembre 2009

Exercice 1.

1) Soit $T = \{(x,y)|x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$

Calculer l'intégrale double

$$\int\int_T \sin(x+y)dxdy$$

Réponse :

$$\int\int_T \sin(x+y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \sin(x+y)dy\right) dx = \int_0^1 [-\cos(x+y)]_{y=0}^{y=1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 (-\cos(x+1-x) + \cos x)\, dx) = \int_0^1 (\cos x - \cos 1)dx = \int_0^1 \cos x dx - \cos 1 \int_0^1 dx$$

$$= [\sin x]_0^1 - \cos 1 = \sin 1 - \cos 1$$

2) Soit $D = \{(x,y)|y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}$

En passant en coordonnées polaires, calculer l'intégrale double

$$\int\int_D xy^2 dxdy$$

Réponse : le déterminant jacobien du changement de variable vaut $\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = r$. Il est nul pour $r = 0$. Introduisons $D_\varepsilon = \{(x,y)|y \geq 0, \varepsilon \leq x^2+y^2 \leq 1\}$.

Alors le changement de variable transforme D_ε en le domaine $\Delta_\varepsilon = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2, \varepsilon \leq r < 1, 0 - \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ et

$$\int\int_{D_\varepsilon} xy^2 dxdy = \int\int_{\Delta_\varepsilon} (r\cos\theta)(r\sin\theta)^2|r|drd\theta = \int_\varepsilon^1 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^4 \cos\theta \sin^2\theta d\theta\right) dr$$

$$= \int_\varepsilon^1 r^4 dr \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos\theta d\theta = \left[\frac{r^5}{5}\right]_\varepsilon^1 \times \left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1-\varepsilon^5}{5}\frac{1-(-1)}{3} = 2\frac{1-\epsilon^5}{15}.$$

Par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$ nous obtenons $\int\int_D xy^2 dxdy = \frac{2}{15}$.

Exercice 2. Soit a un réel et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application de matrice par rapport à la base canonique

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

1) Calculer le déterminant $\Delta(a) = \det(M_a)$ en fonction du paramètre réel a. **Réponse :** laissons les lignes deux et trois inchangées, et remplaçons la première ligne par cette ligne moins la deuxième, puis factorisons $a-1$ dans la première ligne ainsi obtenue.

$$\Delta(a) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & 1-a & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix} = (a-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix}.$$

Maintenant laissons les colonnes un et trois inchangées et ajoutons à la colonne deux la colonne un.

$$\Delta(a) = (a-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 2 & -a \end{vmatrix} = (a-1)\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ 2 & -a \end{vmatrix} = (a-1)(-a^2-a-2) = -(a-1)(a^2+a+2)$$

2) Pour quels a a-t-on $\Delta(a) = 0$? **Réponse :** le trinôme du second degré en a $tr(a) = a^2+a+2$ possède un discriminant négatif et donc n'a pas de racines réelles, donc pour $a = 1$ on a $\Delta(a) = 0$ et c'est la seule valeur réelle de a possible.

3) Pour quels a a-t-on $\ker f = \{0\}$? Réponse : si $a \neq 1$, comme $\Delta(a) \neq 0$, la matrice M_a est inversible (son déterminant est non nul). Donc $f(x,y,z) = 0$ implique que $(x,y,z) = (0,0,0)$ ce qui signifie que $\ker f = \{0\}$. Si $a = 1$ alors M_a n'est pas inversible et donc $f(x,y,z) = 0$ n'implique pas que $(x,y,z) = (0,0,0)$ et donc $\ker f \neq \{0\}$.

4) Déterminer $\ker f$ dans les autres cas. **Réponse :** si $a = 1$ alors $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Si $(x,y,z) \in \ker f$ on doit avoir $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Comme les deux premières lignes de M_1 sont égales, il ne reste que deux équations indépendantes qui sont $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{array}\right\}$ ce qui conduit à $x+y=0$ et $z=0$, d'où $(x,y,z) = (x,-x,0) = x(1,-1,0)$ et donc dans ce cas, $\ker f$ est de dimension 1 et une base de $\ker f$ est $\{(1,-1,0)\}$.

5) Quel est le rang $r(a)$ de la matrice M_a en fonction de a ? Réponse : si $a \neq 1$, f est bijective et donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$, la dimension de l'image est 3, donc le rang est $r(a) = 3$. Si $a = 1$, le noyau est de dimension 1 et comme la somme de la dimension du noyau et de la dimension de l'image égale la dimension de l'espace de départ, nous savons que la dimension de l'image est 2 et donc le rang est $r(1) = 2$. On peut aussi rechercher la dimension du ou des plus grands déterminants non nuls extraits de M_a. Pour $a \neq 1$ comme $\Delta(a) \neq 0$ le rang est 3. Si $a = 1$, le mineur relatif au coefficient de la première ligne première colonne est $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ et donc le rang est 2.

6) Pour $a = 1$, résoudre $f(x, y, z) = (1, 2, 3)$, où x, y, z sont les inconnues.**Réponse :** comme les deux premières lignes de M_1 sont égales en posant $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ on doit avoir $X = Y$ et donc pour que (X, Y, Z) appartiennent à l'image de f il est nécessaire d'avoir $X = Y$. Comme nous savons que l'image est de dimension deux et que nous avons trouvé une relation nécessaire pour que (X, Y, Z) soit dans l'image, cette relation est aussi suffisante (en imposant une relation non triviale sur les trois nombres X, Y, Z, il n'en reste plus que deux indépendants) . Donc $X = Y$ caractérise complètement l'image de f. Comme $(1, 2, 3)$ ne vérifie pas cette condition le système est impossible.

7) Pour $a = 1$, résoudre $f(x, y, z) = (1, 1, 2)$, où x, y, z sont les inconnues. **Réponse :** $(1, 1, 2)$ vérifie bien la condition caractéristique de l'image de f. Donc le problème a des solutions et la solution générale égale une solution particulière, plus un élément quelconque du noyau. Pour trouver une solution particulière, recherchons la sous la forme $(x_0, 0, z_0)$. (Comme le déterminant mineur associé à l'élément en deuxième ligne deuxième colonne est non nul cela signifie que y peut être rejeté au second membre et devenir une variable auxiliaire et donc aussi que l'on peut rechercher une solution particulière telle que $y = 0$) On obtient $\left\{ \begin{array}{l} x_0 + z_0 = 1 \\ x_0 - z_0 = 2 \end{array} \right\}$ d'où $x_0 = \frac{3}{2}$ et $z_0 = -\frac{1}{2}$ et la solution générale est donc $(x, y, z) = (\frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2}) + \lambda(1, -1, 0)$ où λ est un réel quelconque.

Exercice 3 .

1) Dans $\mathbb{R}^3$ soient $u = (1, 2, 1)$, puis $v = (2, 1, 2)$ et $w = (7, -3, 7)$. Soit E le sous espace vectoriel engendré par $\{u, v, w\}$. Quelle est la dimension de E? Donner une base de E. **Réponse :** comme $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0$ le système $\{u, v, w\}$ est lié (la ligne 1 vaut la ligne 3 dans le déterminant). Comme u n'est pas proportionnel à v , le système $\{u, v\}$ est libre. Le système $\{u, v, w\}$ est lié et on peut exprimer w en fonction de u et v. Donc le système $\{u, v\}$ est libre et générateur du sous espace vectoriel engendré par$\{u, v, w\}$. Il constitue donc une base de E et donc E est de dimension deux.

2) Soit $\tau = (3, 0, -3)$. Montrer que $\{u, v, \tau\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de passage P de la base canonique à la base $\{u, v, \tau\}$? **Réponse :** comme $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$, le système $\{u, v, \tau\}$ est libre et posède trois éléments, et donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de passage de la base canonique à cette base est constituée par les trois colonnes des composantes de u , v et τ dans la base canonique. Ainsi nous obtenons $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

3) Soit $Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$. Calculer le produit $P.Q$. **Réponse :** $P.Q = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) Soit $\mathcal{L}$ l'application linéaire dont la matrice dans la base $\{u, v, \tau\}$ est $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Qu'elle est la matrice représenant $\mathcal{L}$ dans la base canonique ? **Réponse :** comme $P.Q = I_3$, nous savons que $P^{-1} = Q$. Si l'application linéaire $\mathcal{L}$ est représentée par K dans la base canonique, elle sera représentée par $P^{-1}.K.P$ dans la base $\{u, v, \tau\}$ et donc $P^{-1}KP = H$. D'où $K = PHP^{-1} = P\left(I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)P^{-1} = I_3 + P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}Q =$

$$= I_3 + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = I_3 + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = I_3 + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Conclusion : la matrice représentant $\mathcal{L}$ dans la base canonique est

$$K = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} .$$