Université Joseph FOURIER - GRENOBLE I

Module MAT 234 Année 2010-2011

Examen Partiel du jeudi 2 décembre 2010

Tous documents et notes manuscriptes interdits.
Calculettes, téléphones portables interdits.

Durée 1h30

Exercice 1 – [*5 points*]

On considère l'application linéaire f de $I\!R^3$ dans $I\!R^3$ dont la matrice relativement à la base canonique (e_1, e_2, e_3) s'écrit

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix},$$

où a est un paramètre réel. *On rappelle que le rang d'une matrice M est le nombre maximal de colonnes de M linéairement indépendantes.*

1. Calculer le déterminant $\Delta(a) = \det(M_a)$.
2. Déterminer le rang de la matrice M_a en fonction de a.
3. On considère le cas $a = -1$. Déterminer une base $\mathrm{Ker} f$ et de $\mathrm{Im} f$.

Exercice 2 – [*4 points*]

Résoudre l'équation

$$e^x \frac{\partial f}{\partial x} + e^y \frac{\partial f}{\partial y} = 0\,,$$

en utilisant le changement de variables $(u, v) = (e^x + e^y,\ e^{-x} - e^{-y})$.

Exercice 3 – [*8 points*]

On définit la fonction $f : I\!R^2 \to I\!R$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \ln(x^2 + y^2) & \text{si}(x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pourra utiliser l'expression de f en coordonnées polaires.

1. Montrer que f est continue sur $I\!R^2$.
2. f admet-elle des dérivées partielles premières en $(0, 0)$?
3. Calculer les dérivées partielles premières de f en $(x, y) \neq (0, 0)$.
4. f est-elle de classe C^1 sur $I\!R^2$?

Exercice 4 – [*4 points*]

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = (x + y)(xy - 1).$$

1. Déterminer la ligne de niveau 0, c'est-à-dire l'ensemble

$$L_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 0\}.$$

2. Déterminer les points critiques de f.
3. Calculer la matrice hessienne $H_f(x, y)$ de f au point (x, y).
4. Déterminer la nature de chaque point critique (maximum local, minimum local ou point selle).