Contrôle continu n°2

Durée : 1 heure 30
Documents, notes manuscrites, calculatrices et téléphones portables interdits.

Exercice 1.

Soient a et b deux nombres réels. Calculer le déterminant de la matrice M ci-dessous.

$$M = \begin{bmatrix} a & -b & -a & b \\ b & a & -b & -a \\ a & -b & a & -b \\ b & a & b & a \end{bmatrix}$$

Indication: On pourra par exemple effectuer des opérations sur les lignes et les colonnes de M.

Exercice 2.

On considère l'équation aux dérivées partielles (E) suivante sur $\mathbb{R}^2$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = y^2$$

1. Vérifier que la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{y^2}{2}$ est solution de (E).

2. On fait le changement de variable

   $$f(x,y) = g(u(x,y), v(x,y)),$$

   avec

   $$u(x,y) = xy \text{ et } v(x,y) = \frac{y}{x}.$$

   Ecrire l'équation aux dérivées partielles ainsi obtenue en fonction des dérivées partielles de g par rapport à u et v.

3. En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 3.
Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\sin(y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On admet l'inégalité ci-dessous, qui pourra donc être utilisée sans démonstration.

$$\forall t \in \mathbb{R}, |\sin(t)| \leq |t|.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles de f en $(x,y) \neq (0,0)$.
3. Montrer que f admet des dérivées partielles au point $(0,0)$.
4. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

   Indication: On pourra considérer la dérivée partielle $\partial f/\partial x$ en un point $(0,y)$.

Exercice 4.
Déterminer et représenter graphiquement la ligne de niveau 0 de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = (x-y)(x^2+y^2-1).$$