Unité d'enseignement MAT234

Corrigé rapide du partiel n°2

1^er Décembre 2011

Exercice nº 1. Effectuons les opérations suivantes sur les lignes et les colonnes :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & -b & -a & b \\ b & a & -b & -a \\ a & -b & a & -b \\ b & a & b & a \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & -b & -a & b \\ b & a & -b & -a \\ 2a & -2b & 0 & 0 \\ 2b & 2a & 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3+\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4+\mathrm{L}_2 \end{matrix} \\
&= 4\begin{vmatrix} 0 & 0 & -a & b \\ 0 & 0 & -b & -a \\ a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{matrix} \mathrm{C}_1 \leftarrow \mathrm{C}_1+\mathrm{C}_3 \\ \mathrm{C}_2 \leftarrow \mathrm{C}_2+\mathrm{C}_4 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \frac{1}{2}\mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_4 \leftarrow \frac{1}{2}\mathrm{L}_4 \end{matrix} \\
&= 4\begin{vmatrix} -a & b & 0 & 0 \\ -b & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} & \begin{matrix} \mathrm{C}_1 \leftrightarrow \mathrm{C}_3 \\ \mathrm{C}_2 \leftrightarrow \mathrm{C}_4 \end{matrix} \\
&= 4\begin{vmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} & \text{(matrice diagonale par blocs)} \\
&= 4\left(a^2+b^2\right)^2.
\end{aligned}$$

Exercice nº 2. 1. Pour $f_0(x,y)=\frac{1}{2}y^2$, on écrit simplement $x\frac{\partial f_0}{\partial x}+y\frac{\partial f_0}{\partial y}=x\times 0+y\times y=y^2$. Donc f_0 est solution de (E).

2. Par la formule de changement de variable, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=y\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)-\frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=x\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+\frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v). \end{cases}$$

3. En reportant dans l'équation proposée, on obtient, pour $x\neq 0$,

$$\begin{aligned}
y^2=\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y} &= x\left(y\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)-\frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)+y\left(x\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+\frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) \\
&= 2xy\frac{\partial g}{\partial u}(u,v).
\end{aligned}$$

Nous avons donc à résoudre, pour $x\neq 0$ et $y\neq 0$, l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=\frac{1}{2}\frac{y}{x}$ soit $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=\frac{1}{2}v$. Donc, en intégrant par rapport à v, on obtient $g(u,v)=\frac{1}{2}uv+c(v)$, où $c:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ soit $f(x,y)=\frac{1}{2}y^2+c\left(\frac{y}{x}\right)$. Les solutions de (E) sont donc les fonctions, pour $c:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} f:\mathbf{R}^\star\times\mathbf{R} &\to \mathbf{R} \\ (x,y) &\mapsto \frac{1}{2}y^2+c\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

Exercice nº 3. 1. Encadrons cette fonction au voisinage de 0. On a

$$\begin{aligned}
\left|f(x,y)\right| &= \left|\frac{xy\sin y}{x^2+y^2}\right| \\
&\leq |x|\left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right| \qquad \text{(d'après l'indication)} \\
&\leq |x| \qquad (\text{car } y^2\leq y^2+x^2).
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{(x,y)\to 0} x=0$ et $f(0,0)=0$, cette fonction est continue en 0.

2. On a, en dérivant, pour tout $(x,y)\neq(0,0)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y\sin(y)\left(x^2+y^2\right)-2x^2y\sin y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=-\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}y\sin y, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\left(x\sin(y)+xy\cos y\right)\left(x^2+y^2\right)-2xy^2\sin y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=x\frac{\left(x^2-y^2\right)\sin y+y\left(x^2+y^2\right)\cos y}{\left(x^2+y^2\right)^2}.
\end{aligned}$$

3. Évaluons les taux d'accroissement suivants :

$$\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0;$$
$$\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0.$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = 0;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = 0.$$

Les dérivées partielles de f en $(0,0)$ existent donc et sont nulles.

4. Cependant,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \frac{\sin y}{y} \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 1 \neq 0$$

donc f n'est pas $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.

Exercice nº 4. La ligne L_0 de niveau 0 de f est donnée par l'équation $(x-y)(x^2+y^2-1)=0$. Cette équation est équivalente au système $\begin{cases} x-y=0, \\ x^2+y^2-1=0. \end{cases}$

C'est la réunion de la droite $y=x$ et du cercle de centre 0 et de rayon 1.

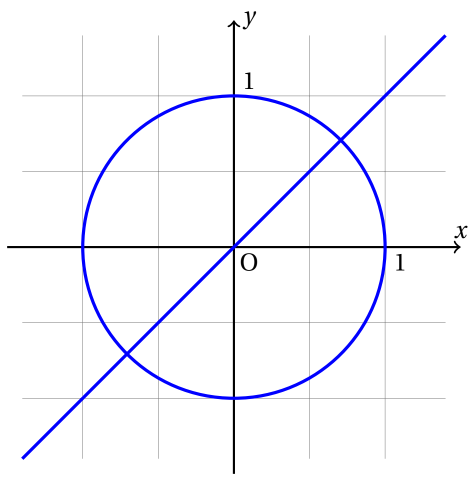

FIGURE 1 – Graphe de la ligne de niveau L_0