Université de Grenoble I Année 2013-2014
Module MAT 234

CC2 : examen partiel du jeudi 05 décembre 2013

Tous documents et notes manuscrites interdits – Calculettes, téléphones portables interdits.

Durée 1h30

Exercice 1 – L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z) = (3\,x + 2\,y - 2\,z,\ -x + y + z,\ -x + 2\,z).$$

On donne par ailleurs les matrices suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

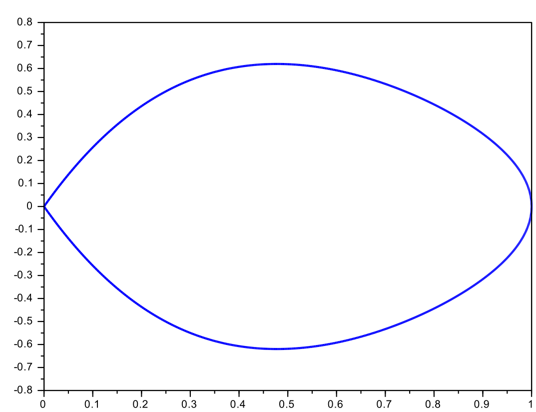
1. Calculer le produit des 2 matrices P et Q.
2. Donner la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.
3. On donne les vecteurs $u_1 = e_1 + e_3,\ \ u_2 = e_2 + e_3,\ \ u_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Justifier que ces 3 vecteurs forment une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 2 –

On considère le domaine D du plan $\mathbb{R}^2$ (voir figure ci-contre) délimité par la courbe fermée simple Γ, définie paramétriquement par les équations :

$$x(t) = 1 - t^2\,, \quad y(t) = t - t^7\,, \qquad t \in [-1, 1].$$

Déterminer l'aire A du domaine D (*on utilisera la formule de Green-Riemann*).



Exercice 3 – En utilisant la méthode de Gauss, déterminer <u>l'ensemble</u> des solutions du système suivant selon les valeurs du paramètre réel λ.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2\,y & - & z & + & 3\,t & = & 1 \\ 2\,x & - & y & - & 3\,z & - & 2\,t & = & 3 \\ -x & + & 3y & + & 2\,z & + & 5\,t & = & \lambda \end{array} \right.$$

En particulier, donner la dimension du noyau puis le rang de la matrice associée à ce système linéaire.

Exercice 4 – On considère la matrice $M_{a,b,c}$ dépendant de trois paramètres réels a, b, c :

$$M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de cette matrice. *Pour cela on commencera par ajouter les lignes L_2 et L_3 à la première ligne, puis on effectuera une réduction de Gauss sur la première ligne.*

   On suppose désormais que $b = c = 0$ et on note M_a la matrice $M_{a,0,0}$ dépendant ainsi uniquement du paramètre a.
2. Montrer que la matrice M_a s'écrit : $M_a = a\,U$, où U est une matrice que l'on précisera.
3. Calculer U^2. En déduire la matrice inverse U^{-1}.
4. On donne le vecteur $X = (1,1,1)^T$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminez les vecteurs $X_1 = U\,X$, $X_2 = U^2\,X$, $X_3 = U^3\,X$, puis plus généralement le vecteur $X_p = U^p\,X$, où U^p représente la puissance p-ième de la matrice U
5. Calculer les matrices $(M_a)^{12}$ et $(M_a)^{17}$.

Exercice 5 – On note $\mathcal{B}_0 = (u_0, v_0)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
On donne les vecteurs $u_1 = (1,-1)$, $v_1 = (1,1)$, $u_2 = (2,2)$, $v_2 = (-2,2)$ exprimés dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.

1. Vérifier que (u_1, v_1) et (u_2, v_2) forment deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner les matrices de passage $P_{0,1}$ et $P_{0,2}$ de la base $\mathcal{B}_0$ vers chacune des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

On rappelle que la matrice de passage $P_{1,2}$ de la base $\mathcal{B}_1$ vers la base $\mathcal{B}_2$ est la matrice de l'application identité *Id* de $\mathbb{R}^2$ muni de la base $\mathcal{B}_2$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base $\mathcal{B}_1$.

3. Exprimer la matrice $P_{1,2}$ à l'aide des 2 matrices de passage $P_{0,1}$ et $P_{0,2}$. *Justifier votre réponse à l'aide du schéma : $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{Id} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{Id} \mathbb{R}^2$, que vous compléterez.*
4. Calculer la matrice de passage $P_{1,2}$.