NOM : **Prenom :** **Groupe :**

Université de Grenoble I MAT234 Année 2015-2016

CC1b : examen partiel du 03 décembre 2015

Une feuille A4 recto-verso <u>manuscrite</u> est autorisée

Calculettes, téléphones portables interdits

Durée 45mn

Les réponses brouillonnes seront systématiquement refusées

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + y^3.$$

1. Donnez le ou les point(s) critique(s) de f (*donnez une breve justification*).

$$\text{2 points critiques : } M_1 : (x, y) = (0, 0); \quad M_2 : (x, y) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

2. Préciser la nature de chacun des points critiques de f. (*donnez une breve justification*).

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M_1 \text{ est un point selle;}$$
$$H\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow M_2 \text{ est un minimum local.}$$

Exercice 2. Soit A une matrice non nulle de taille 3×7.
Pour chaque question, cochez une unique case.

1. La valeur minimal du rang de A est
   ☐ 0 ; ☒ 1 ; ☐ 3 ; ☐ 7.
2. La valeur maximal du rang de A est
   ☐ 0 ; ☐ 1 ; ☒ 3 ; ☐ 7.
3. On suppose que le rang de A est 2, alors $\ker A$ est de dimension
   ☐ 0 ; ☐ 1 ; ☐ 2 ; ☐ 3 ; ☒ 5 ; ☐ 7.
4. On suppose que le rang de A est 2, alors $\ker A^T$ est de dimension
   ☐ 0 ; ☒ 1 ; ☐ 2 ; ☐ 3 ; ☐ 5 ; ☐ 7.

Exercice 3. On se donne les trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$

$$u = (1, 2, 1), \quad v = (2, 1, 2), \quad w = (3, 0, -3)$$

ainsi que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. $\det(u, v, w)$ est égale à
   ☐ -6 ; ☐ 6 ; ☒ 18 ; ☐ 32.
   On en déduit que $\{u, v, w\}$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Donner la matrice de passage P de la base canonique à la base $\{u, v, w\}$.

   Évident...

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$. Calculer le produit PQ.

   $PQ = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ainsi $Q = P^{-1}$.

4. Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base $\{u, v, w\}$ est A. Déterminer la matrice B représentant f dans la base canonique (*donnez une breve justification*).

$$B = P\,A\,Q = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{7}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{7}{6} & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -7 \\ -2 & 8 & -2 \\ -7 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Le rang de B est
   ☐ 0 ; ☐ 1 ; ☒ 2 ; ☐ 3.
6. Le noyau de B est

$$\mathrm{Ker}(B) = \left\{ \alpha\, v = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbf{R} \right\}$$