Université de Grenoble I Année 2015-2016
Module MAT 234

CC1a : examen partiel du 15 octobre 2015

Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée

Calculettes, téléphones portables interdits

Durée 45mn

Exercice 1 – [5pts].

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et soit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs. On suppose que f et $\mathbf{u}$ sont de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que

$$\operatorname{div}(f\mathbf{u}) = \mathbf{f}\,\operatorname{div}(\mathbf{u}) + \nabla\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}.$$

Exercice 2 – [8pts].

1. Donner le domaine de définition de la fonction $u(x, y) = \ln y - \sqrt{x}$.
2. Soient u et v deux nouvelles variables définies par $(u, v) = (\ln y - \sqrt{x}, \sqrt{x})$. Déterminer x et y en fonction de u et v.
3. Résoudre dans le domaine $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ l'équation aux dérivées partielles

$$2\,x^{\frac{1}{2}}\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = y^5$$

à l'aide du changement de variables $(u, v) = (\ln y - \sqrt{x}, \sqrt{x})$.

Exercice 3 – [7pts].

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = y^2 + x^2 + 2y + 4x + 5$.

1. Donner le gradient ∇f et la différentielle df de la fonction f au point (x, y).
2. Tracer la ligne de niveau L_k de la fonction f pour $k > 0$.
3. Donner l'allure du graphe de la fonction f.