Université de Grenoble I Année 2015-2016
Module MAT 234

Corrigé de l'examen partiel du 15 octobre 2015

Exercice 1 – [5 pts].

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et soit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs. On suppose que f et $\mathbf{u}$ sont de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que

$$\operatorname{div}(f\mathbf{u}) = f \operatorname{div}(\mathbf{u}) + \nabla f \cdot \mathbf{u}.$$

Solution de l'exercice 1. Par définition de l'opérateur div, on a que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f\mathbf{u}) &= \operatorname{div}(fu_1, fu_2, fu_3) \\
&= \frac{\partial(fu_1)}{\partial x} + \frac{\partial(fu_2)}{\partial y} + \frac{\partial(fu_3)}{\partial z} \\
&= f\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial u_2}{\partial y} + u_2\frac{\partial f}{\partial y} + f\frac{\partial u_3}{\partial z} + u_3\frac{\partial f}{\partial z} \\
&= f\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right) + u_1\frac{\partial f}{\partial x} + u_2\frac{\partial f}{\partial y} + u_3\frac{\partial f}{\partial z} \\
& f\operatorname{div}(u_1, u_2, u_3) + (u_1, u_2, u_3) \cdot (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) \\
&= f\operatorname{div}(\mathbf{u}) + \nabla f \cdot \mathbf{u}.
\end{aligned}$$

Exercice 2 – [8 pts].

1. Donner le domaine de définition de la fonction $u(x, y) = \ln y - \sqrt{x}$.
2. Soient u et v deux nouvelles variables définies par $(u, v) = (\ln y - \sqrt{x}, \sqrt{x})$. Déterminer x et y en fonction de u et v.
3. Résoudre dans le domaine $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ l'équation aux dérivées partielles
$$2\,x^{\frac{1}{2}}\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = y^5$$
à l'aide du changement de variables $(u, v) = (\ln y - \sqrt{x}, \sqrt{x})$.

Solution de l'exercice 2.

1. La fonction $u(x, y) = \ln y - x^{\frac{1}{2}}$ est bien définie quand $y > 0$ et $x \geq 0$, c'est-à-dire que son domaine c'est $D_u = [0, +\infty[\, \times\,]0, +\infty[$.
2. Le système
$$\begin{cases} u = \ln y - x^{\frac{1}{2}} \\ v = x^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$
a comme solution $x = v^2$, $y = e^{u+v}$.

3. Avec la nouvelle fonction $g(u,v)$ définie par $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$, soit $f(x,y) = g(u(x,y), v(x,y))$ car le changement de variables est bijectif, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial g}{\partial v}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{1}{y}\frac{\partial g}{\partial u},$$

d'où $2x^{\frac{1}{2}}\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial v}$. On a aussi $y^5 = e^{5(u+v)}$ d'après le point précédent, donc notre équation différentielle s'écrit comme $\frac{\partial g}{\partial v} = e^{5(u+v)}$. En intégrant en v on obtient donc

$$g(u,v) = \frac{1}{5}e^{5(u+v)} + h(u)$$

où $h \in C^1(0,\infty)$, donc $f(x,y) = \frac{1}{5}y^5 + h(\ln y - x^{-\frac{1}{2}})$.

Exercice 3 – [7 pts].

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = y^2 + x^2 + 2y + 4x + 5$.

1. Donner le gradient ∇f et la différentielle *df* de la fonction f au point (x,y).
2. Tracer la ligne de niveau L_k de la fonction f pour $k > 0$.
3. Donner l'allure du graphe de la fonction f.

Solution de l'exercice 3.

1. On a par définition

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$= (2x+4, 2y+2).$$

La différentielle *df* est alors l'application linéaire

$$df : (u,v) \to \nabla f \cdot (u,v)$$

c'est à dire

$$df : (u,v) \to (2x+4)u + (2y+2)v.$$

On peut aussi écrire

$$df = (2x+4)dx + (2y+2)dy.$$

2. La ligne de niveau L_k est donnée par l'équation

$$x^2 + 4x + y^2 + 2y + 5 = k$$
$$(x+2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 + 5 = k$$
$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = k$$

ce qui est l'équation d'un cercle de centre $(-2,-1)$ et de rayon $\sqrt{k}$.

3. Le graphe de f est le lieu dans $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation

$$z = f(x,y)$$
$$z = (x+2)^2 + (y+1)^2$$

C'est un paraboloide centré sur le point $(-2,-1,0)$.