Université de Grenoble I Année 2014-2015

Module MAT 234

CC1 : examen partiel de novembre 2014

Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée

Calculettes, téléphones portables interdits

Durée 1h30

Exercice 1 –

On considère la fonction de deux variables définie par

$$f(x,y) = x^4 + y^3 - 3\,y - 2\,.$$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Calculer la matrice hessienne de f au point (x,y) :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}.$$

   Peut-on en déduire la nature des points critiques de f ?
3. Calculer $f(0+h, 1+k) - f(0,1)$ pour h et k proches de zéro (et au moins dans l'intervalle $[-1,1]$).
   En déduire la nature de l'un des points critiques.
4. Tracer les coupes de la surface représentative de f par les plans $x=0$ et $y=-1$.
   En déduire la nature de l'autre point critique.

Exercice 2 –

Soit U un champ de vecteurs de $I\!R^3$ dans $I\!R^3$ et f une fonction de $I\!R^3$ dans $I\!R$, chacune de ces deux fonctions étant de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$\mathrm{rot}\ (f\,U) = f\ \mathrm{rot}\ U + \big(\mathrm{grad}\ f\big) \wedge U$$

Exercice 3 –

Déterminer les fonctions $f : I\!R^2 \to I\!R$, $(t,x) \mapsto f(t,x)$, de classe C^2, vérifiant l'équation aux dérivées partielles (équation des ondes unidimensionnelle) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = t^2 - x^2 \qquad \text{(E0)}$$

à l'aide du changement de variables

$$\varphi : (t,x) \longmapsto \begin{cases} u = t + x \\ v = t - x \end{cases}.$$

Exercice 4 –

On considère la fonction de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ par

$$f(x,y) = \frac{x\,y}{x^2+y^2}.$$

Les questions 1. et 2. sont indépendantes entre elles et indépendantes des questions 3. et 4.

1. Déterminer la limite de $f(x,tx)$ lorsque x tend vers 0, où t est un paramètre réel quelconque. Peut-on prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}^2$?
2. Déterminer la ligne de niveau $L_{\frac{1}{2}} = \{(x,y) \in \mathcal{D}_f,\ f(x,y) = \frac{1}{2}\}$.
   Donner sans calcul la direction du gradient de f au point $(1,1)$.
3. On considère le domaine Δ défini par

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \leq x\}$$

   Représenter graphiquement le domaine Δ.
4. Calculer l'intégrale double I en effectuant un changement de variables approprié

$$I = \iint_\Delta f(x,y)\,dxdy\,.$$