Université de Grenoble I Année 2014-2015

Module MAT 234

CC1 : examen partiel de novembre 2014 — CORRIGÉ

Exercice 1 – On considère la fonction de deux variables définie par

$$f(x,y) = x^4 + y^3 - 3\,y - 2\,.$$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Calculer la matrice hessienne de f au point (x,y) :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}.$$

   Peut-on en déduire la nature des points critiques de f ?
3. Calculer $f(0+h, 1+k) - f(0,1)$ pour h et k proches de zéro (et au moins dans l'intervalle $[-1,1]$). En déduire la nature de l'un des points critiques.
4. Tracer les coupes de la surface représentative de f par les plans $x = 0$ et $y = -1$. En déduire la nature de l'autre point critique.

Corrigé.

1. Les points critiques de f annulent son gradient :

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & 4\,x^3 & = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & 3\,y^2 - 3 & = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y^2 & = & 1 \end{array} \right. .$$

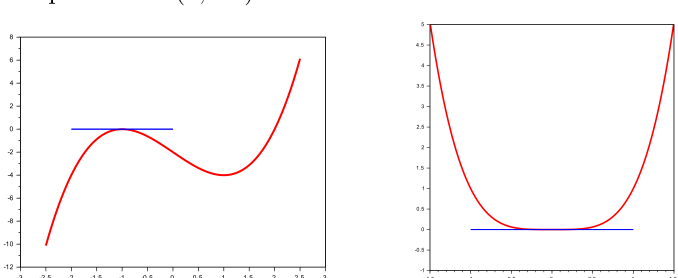
   Ainsi, f admet deux points critiques, un en $A = (0,1)$ et un autre en $B = (0,-1)$.
2. Un calcul direct donne

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12\,x^2 & 0 \\ 0 & 6\,y \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad H_f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } H_f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix},$$

   de sorte que $\det(H_f(A)) = 0$ et $\det(H_f(B)) = 0$. On ne peut donc conclure sur la nature de ces deux points critiques à l'aide de la hessienne. Il faut donc faire une étude locale “à la main”.
3. Etude du point $A = (0,1)$.

$$\begin{array}{rcl} f(0+h,1+k) - f(0,1) & = & \big(h^4 + (1+k)^3 - 3(1+k) - 2\big) - (-4) \\ & = & h^4 + k^3 + 3k^2 \\ & = & h^4 + k^2(k+3). \end{array}$$

   Soit : $f(0+h,1+k) - f(0,1) > 0$ pour tout h et k non nuls dans l'intervalle $[-1,1]$.
   Conclusion : f admet un <u>minimum local strict</u> en A.
4. Etude du point $B = (0,-1)$.
   Les coupes de la surface représentative de f par les plans $x = 0$ et $y = -1$ sont illustrées par les 2 courbes ci-dessous au voisinage du point $B = (0,-1)$.



Coupe $x = 0$ — $y \mapsto f(0,y) = y^3 - 3y - 2$

Coupe $y = -1$ — $x \mapsto f(x,-1) = x^4$

D'où l'on déduit que le point critique $B = (0,-1)$ est un <u>point selle</u> de f.

Exercice 2 – Soit U un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ et f une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, chacune de ces deux fonctions étant de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$\text{rot }(f\,U) = f \text{ rot } U + \big(\text{grad } f\big) \wedge U$$

<u>Corrigé</u>.

L'application $f\,U$ définit un champ de vecteurs $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 :

$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z)\,.\,U(x,y,z) = \begin{pmatrix} f(x,y,z)\,.\,U_1(x,y,z) \\ f(x,y,z)\,.\,U_2(x,y,z) \\ f(x,y,z)\,.\,U_3(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\text{rot }(f\,U) = \left| \begin{array}{l} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} f\,.\,U_1 \\ f\,.\,U_2 \\ f\,.\,U_3 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} \partial_y(f\,.\,U_3) - \partial_z(f\,.\,U_2) \\ \partial_z(f\,.\,U_1) - \partial_x(f\,.\,U_3) \\ \partial_x(f\,.\,U_2) - \partial_y(f\,.\,U_1) \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} \Big(f\,\dfrac{\partial U_3}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,U_3\Big) - \Big(f\,\dfrac{\partial U_2}{\partial z} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\,U_2\Big) \\[2ex] \Big(f\,\dfrac{\partial U_1}{\partial z} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\,U_1\Big) - \Big(f\,\dfrac{\partial U_3}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial x}\,U_3\Big) \\[2ex] \Big(f\,\dfrac{\partial U_2}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial x}\,U_2\Big) - \Big(f\,\dfrac{\partial U_1}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,U_1\Big) \end{array} \right.$$

$$= \left| \begin{array}{l} f\Big(\dfrac{\partial U_3}{\partial y} - \dfrac{\partial U_2}{\partial z}\Big) + \Big(\dfrac{\partial f}{\partial y}\,U_3 - \dfrac{\partial f}{\partial z}\,U_2\Big) \\[2ex] f\Big(\dfrac{\partial U_1}{\partial z} - \dfrac{\partial U_3}{\partial x}\Big) + \Big(\dfrac{\partial f}{\partial z}\,U_1 - \dfrac{\partial f}{\partial x}\,U_3\Big) \\[2ex] f\Big(\dfrac{\partial U_2}{\partial x} - \dfrac{\partial U_1}{\partial y}\Big) + \Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}\,U_2 - \dfrac{\partial f}{\partial y}\,U_1\Big) \end{array} \right. = f \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial U_3}{\partial y} - \dfrac{\partial U_2}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial U_1}{\partial z} - \dfrac{\partial U_3}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial U_2}{\partial x} - \dfrac{\partial U_1}{\partial y} \end{array} \right. + \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} U_1 \\[2ex] U_2 \\[2ex] U_3 \end{array} \right. = f \text{ rot } U + \big(\text{grad } f\big) \wedge U.$$

Exercice 3 – Déterminer les fonctions $f : I\!R^2 \to I\!R$, $(t,x) \mapsto f(t,x)$, de classe C^2, vérifiant l'équation aux dérivées partielles (équation des ondes unidimensionnelle) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = t^2 - x^2 \tag{E0}$$

à l'aide du changement de variables

$$\varphi : (t,x) \longmapsto \begin{cases} u = t + x \\ v = t - x \end{cases}.$$

Corrigé.

Le changement de variables φ proposé est clairement bijectif et C^2. Notons $g : (u,v) \mapsto g(u,v)$ la nouvelle fonction inconnue telle que $f = g \circ \varphi$, soit $f(t,x) = g\Big(u(t,x), v(t,x)\Big)$. L'application de la "règle de dérivation en chaine" permet d'écrire successivement :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{\partial g}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial g}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u} - \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{cases}$$

puis, en utilisant le théorème de Schwarz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \Big(\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}\Big) + \Big(\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}\Big) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\,\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \Big(\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}\Big) - \Big(\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} - \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}\Big) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2\,\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} \end{cases}$$

Ainsi, en reportant ces dérivées partielles secondes dans l'équation aux dérivées partielles (E0), on trouve que g doit satisfaire l'EDP :

$$4\,\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = t^2 - x^2 = uv \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{1}{4} uv,$$

ce qui après intégration par rapport à u puis par rapport à v conduit à

$$g(u,v) = \frac{1}{16} u^2\, v^2 + H_1(u) + H_2(v)$$

où H_1 et H_2 sont 2 fonctions de classe C^2. Ainsi, la solution de l'équation aux dérivées partielles (E0) est

$$f(x,t) = \frac{1}{16}\big(t^2 - x^2\big)^2 + H_1(t+x) + H_2(t-x).$$

Exercice 4 – On considère la fonction de deux variables définie sur $I\!R^2 - \{(0,0)\}$ par

$$f(x,y) = \frac{x\,y}{x^2+y^2}.$$

Les questions 1. et 2. sont indépendantes entre elles et indépendantes des questions 3. et 4.

1. Déterminer la limite de $f(x,tx)$ lorsque x tend vers 0, où t est un paramètre réel quelconque. Peut-on prolonger f par continuité sur $I\!R^2$?
2. Déterminer la ligne de niveau $L_{\frac{1}{2}} = \{(x,y) \in \mathcal{D}_f,\ f(x,y) = \frac{1}{2}\}$.
   Donner sans calcul la direction du gradient de f au point $(1,1)$.
3. On considère le domaine Δ défini par

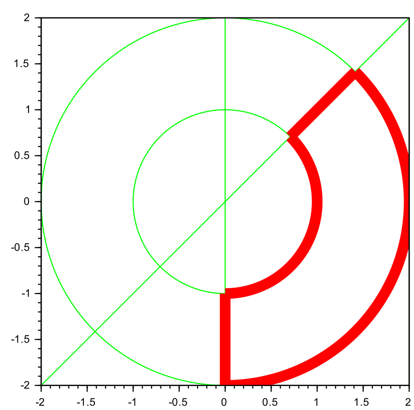
$$\Delta = \{(x,y) \in I\!R^2 \quad \text{tel que} \quad 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \le x\}$$

   Représenter graphiquement le domaine Δ.
4. Calculer l'intégrale double I en effectuant un changement de variables approprié

$$I = \iint_\Delta f(x,y)\,dxdy\,.$$

Corrigé.

1. $\lim_{x\to 0} f(x,tx) = \lim_{x\to 0} \frac{t\,x^2}{x^2+t^2\,x^2} = \frac{t}{1+t^2}$. La limite dépend de la pente t de la droite $y = tx$ selon laquelle le point (x,y) tend vers $(0,0)$. La fonction f n'est donc pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.
2. $L_{\frac{1}{2}} = \{(x,y) \in (I\!R^2)^*,\ \frac{x\,y}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\} = \{(x,y) \in (I\!R^2)^*,\ y = x\}$, car $\frac{x\,y}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x-y)^2 = 0$.
   Le gradient de f au point $(1,1)$ est orthogonal à la ligne de niveau passant par ce point, c'est-à-dire à $L_{\frac{1}{2}}$. Ce gradient est donc parallèle à la droite $y = -x$.
3.



Domaine Δ : délimité par les deux cercles centrés à l'origine de rayon 1 et 2, par l'axe des ordonnées et par la première bissectrice.

4. Etant donné la géométrie du domaine d'intégration, on effectue un changement de variables en coordonnées polaires, ce qui conduit à

$$I = \iint_\Delta f(x,y)\,dxdy \;=\; \iint_{\Delta'} f\big(x(r,\theta), y(r,\theta)\big)\,r\,drd\theta$$

   où Δ' est l'image réciproque de Δ par le changement de variable et correspond donc à la description du domaine relativement aux coordonnées polaires :

$$\Delta' = \{(r,\theta) \;\text{ tel que }\; 1 \le r \le 2\,,\ -\pi/2 \le\ \theta\ \le \pi/4\}.$$

   Ainsi,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/4} \int_{r=1}^{2} \frac{r^2 \cos\theta \sin\theta}{r^2}\, r\,drd\theta \;=\; \Big(\int_{-\pi/2}^{\pi/4} \frac{1}{2}\sin(2\theta)\;d\theta\Big).\Big(\int_1^2 r\,dr\Big) \\ &= \Big[-\frac{1}{4}\cos(2\theta)\Big]_{-\pi/2}^{\pi/4} . \Big[\frac{r^2}{2}\Big]_1^2 \;=\; -\frac{3}{8}. \end{aligned}$$