Contrôle 1

Les questions sont indépendantes. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction. Tous documents et notes manuscriptes interdits. Calculettes, téléphones portables interdits. Durée : 2h.

Exercice 1.
Soit $f \ : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ la fonction définie par

$$f(x,y) \quad = \quad xy(x+y-1).$$

1.1. Déterminer les points critiques de f.

1.2. Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, Calculez la matrice hessienne

$$Hf(x,y) \quad = \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

au point (x,y).

1.3. Pour chaque point critique, déterminez s'il s'agit d'un maximum local, d'un minimum local ou d'un point col.

1.4. Déterminez l'ensemble des valeurs prises par f, c'est dire l'ensemble

$$f(\mathbf{R}^2) \quad = \quad \left\{ z \in \mathbf{R}, \text{ tels que } \exists \, (x,y) \in \mathbf{R}^2, \text{tels que } f(x,y) = z \right\}.$$

Exercice 2.
Résoudre pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xy$ à l'aide du changement de variables $(u,v) = (x+y, x-y)$, la fonction inconnue $f \ : \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ étant de classe C^2.

Exercice 3.
3.1. Soit D, E deux domaines de $\mathbf{R}^2$ et $\phi \ : D \longrightarrow E$ qui définit un changement de variable $\phi(x,y) = (X,Y)$. Soit $f \ : D \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Donnez la formule de changement de variable qui permet de calculer l'intégrale $\int_D f(x,y)dxdy$ comme une intégrale sur E.

3.2. Déterminer l'aire de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Exercice 4.

On considère la fonction f ; $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ définie par

$$f(x,y) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

4.1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

4.2. Soit $(x,y) \neq (0,0)$. Justifiez que la fonction f est différentiable en ce point et calculez ses dérivée partielles.

4.3. La fonction f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?

4.4. Calculez la dérivée directionnelle de f en $(0,0)$, dans la direction $\vec{d} = (1,1)$. On rappelle que pour tout $\vec{a} \in \mathbf{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{d}}(\vec{a}) \quad = \quad \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{d}) - f(\vec{a})}{t}.$$

4.5. f est-elle différentiable en $(0,0)$?