Exercice 1.

Déterminer tous les points critiques (les points où $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$) de la fonction

$$f(x,y) = xy(x+y-1).$$

Réponse : comme $f(x,y) = x^2y + xy^2 - xy$, on obtient $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + y^2 - y = y(2x+y-1)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2xy - x = x(x+2y-1)$ et donc trouver les points critiques de f revient à résoudre le système suivant $\left\{ \begin{array}{l} y(2x+y-1) = 0 \\ x(x+2y-1) = 0 \end{array} \right\}$. La première équation implique que ou bien $y = 0$ ou bien $2x + y - 1 = 0$. Traitons donc ces deux cas.

1. Si $y = 0$ la seconde équation devient $x(x-1) = 0$ et donc ou bien $x = 0$ ou bien $x = 1$ et donc nous avons obtenu que $(0,0)$ et $(1,0)$ sont des points singuliers.
2. Si $2x + y - 1 = 0$ la seconde équation impose ou bien $x = 0$ ou bien $x + 2y - 1 = 0$. Dans le premier cas on obtient $x = 0$ et $y = 1$ donc $(0,1)$ est un point singulier. Dans le second cas il faut résoudre $\begin{array}{l} 2x+y-1=0 \\ x+2y-1=0 \end{array}$ et on obtient que $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ est un point singulier.

Conclusion : la fonction f admet 4 points critiques et seulement 4 qui sont $(0,0)$, puis $(1,0)$ puis $(0,1)$ puis $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Déterminer pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$**, la matrice** $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$

Réponse : à partir de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + y^2 - y$ on obtient $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y$ et aussi $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2x + 2y - 1$. A partir de $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2xy - x$ on obtient $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x + 2y - 1$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x$ et donc

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x+2y-1 \\ 2x+2y-1 & 2x \end{pmatrix}$$

Dire pour chacun des points critiques s'il s'agit d'un point col, d'un maximum local, ou d'un minimum local.

Réponse :

1. au point critique $(0,0)$ nous avons $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dont le déterminant est négatif, et donc les courbures principales sont de signes contraires. Il s'agit d'un point col.
2. au point critique $(1,0)$ nous avons $Hf(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dont le déterminant est négatif, et donc les courbures principales sont de signes contraires. Il s'agit d'un point col.
3. au point critique $(0,1)$ nous avons $Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dont le déterminant est négatif, et donc les courbures principales sont de signes contraires. Il s'agit d'un point col.
4. au point critique $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ nous avons $Hf(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dont le déterminant est positif, et donc les courbures principales sont de mêmes signes. Il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local. Comme la trace de la matrice Hessienne est positive, ces deux courbures principales ont une somme positive, et donc sont positives. Il s'agit d'un minimum local.

Déterminer l'ensemble des valeurs prises par f c'est à dire $\left\{z \in \mathbb{R}, \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = z\right\}$.

Réponse : $f(x,x) = x^2(2x-1) = 2x^3 - x^2$ est un polynôme de degré trois réel, qui tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$ et vers $-\infty$ quand $x \to -\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il prend donc toutes les valeurs possibles dans $\mathbb{R}$. Donc en restriction à la première bissectrice, toutes les valeurs ont été atteintes. Donc $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$.

Exercice 2.

Résoudre pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xy$ à l'aide du changement de variable $(u,v) = (x+y, x-y)$, la fonction inconnue $f \ : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ étant de classe C^2.

Réponse : commençons par calculer la matrice jacobienne du changement de variable $\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Son déterminant vaut -1 et il est non nul. Donc le changement de variable est bien défini, bijectif. Posons $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ qui s'inverse en $f(x,y) = F(u(x,y), v(x,y))$. Dérivons cette dernière égalité partièlement par rapport à x. Nous obtenons $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}$. De la même manière $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}$. En recommençant à dériver $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à x, nous avons $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial F^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$. En procédant de la même manière en dérivant partièlement $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}$ par rapport à y, on obtient $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial F^2}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$. D'où $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}$ (comme la fonction est de classe C^2, les dérivées secondes croisées sont égales) . Maintenant exprimons xy en fonction de u et de v en remarquant que $u^2 - v^2 = (x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$. Alors l'équation devient $\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} = \frac{u^2 - v^2}{16}$. Prenons en une primitive en u. Alors $\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{u^3}{48} - \frac{v^2}{16}u + \alpha(v)$ où α est une fonction quelconque d'une variable. Prenons en une primitive en v . Alors $F = \frac{u^3}{48}v - \frac{v^3}{48}u + A(v) + B(u)$ où A est une primitive de α donc une fonction quelconque de v et B une fonction quelconque de u. En revenant aux variables x et y , nous avons démontré que

$$f(x,y) = \frac{(x+y)^3(x-y) - (x+y)(x-y)^3}{48} + A(x-y) + B(x+y)$$

où A est une fonction quelconque de classe C^2 d'une variable, et B est une fonction quelconque de classe C^2 d'une variable.

Exercice 3.

Soit D, E deux domaines de $\mathbb{R}^2$ et $\phi \ : D \longrightarrow E$ qui définit un changement de variable $\phi(x,y) = (X,Y)$. Soit $f \ : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Donnez la formule de changement de variable qui permet de calculer l'intégrale $\int_D f(x,y)dxdy$ comme une intégrale sur E. Réponse : $\int_D f(x,y)dxdy = \int_E f(x(X,Y), y(X,Y))|\frac{D(x,y)}{D(X,Y)}|dXdY$ où $\frac{D(x,y)}{D(X,Y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} \end{vmatrix}$

Déterminer l'aire enlacée par l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Réponse : posons $X = \frac{x}{a}$ et $Y = \frac{y}{b}$. L'équation de l'ellipse devient dans les coordonnées X et Y : $X^2 + Y^2 = 1$. L'aire d'un disque de rayon 1 est π. Par ailleurs $|\frac{D(x,y)}{D(X,Y)}| = |\frac{1}{\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}}| = |\frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{vmatrix}}| = |ab| = ab$ et donc l'aire de l'ellipse $= \int_D 1dxdy = \int_E 1.abdXdY = ab\int_E 1.dXdY = \pi ab$.

Exercice 4.

La fonction $f \ : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2} \text{ sinon} \end{array} \right\}$ est-elle continue en $(0,0)$? Réponse : non parce que $f(x,0) = 1$ tend vers 1 quand $x \to 0$ et que $f(x,x) = \frac{3}{2}$ tend vers $\frac{3}{2}$ quand $x \to 0$. Nous avons donc trouvé deux chemins distincts qui passent par $(0,0)$, et qui donnent à la restriction de f à ces deux chemins deux limites différentes quand le point courant tend vers $(0,0)$.

Comme $\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{\frac{h^2}{h^2}-1}{h} = \frac{0}{h} = 0$ nous savons que $\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$ et donc la fonction admet une dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$ et l'on a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. De même $\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Comme la fonction n'est pas continue en $(0,0)$, elle ne peut y être différentiable, puisque la différentiabilité d'une fonction en un point de l'ensemble de départ y implique sa continuité.