Unité d'enseignement MAT234

Corrigé rapide du partiel n°1

4 Novembre 2011

Exercice nº 1. a) Tout d'abord on effectue $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ et on simplifie le calcul en :

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & -3 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1+\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1+\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1+\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} && \text{(en développant selon la première colonne)} \\
&= (2-\lambda)\left((2-\lambda)(-1-\lambda)+(1+\lambda)\right) && \text{(le second déterminant est nul car ses lignes sont colinéaires)} \\
&= (2-\lambda)(1+\lambda)(-1+\lambda)
\end{aligned}$$

b) On a déjà obtenu la forme factorisée en a). Si l'on n'a pas déjà trouvé un facteur de P_A, on voit aisément que la forme développée de P_A a ± 1 comme racine évidente. On factorise alors en divisant par $x \pm 1$ ou même x^2-1. On fait alors une division euclidienne entre les polynômes ou on écrit a priori $P_A(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$ et on identifie. Les valeurs propres sont donc $\{\pm 1, 2\}$ (toutes de multiplicité 1).

c) A est diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

d) ker(A) est de dimension 0 car 0 n'est pas valeur propre de A. Par le théorème du rang, $\mathrm{Rg}(A) = 3$ et donc $\mathrm{Im}(A) = \mathbf{R}^3$

e) On résout successivement les systèmes $(A-\lambda I_3)X = 0$, pour $X = {}^t(x\ y\ z)$ et $\lambda \in \{\pm 1, 2\}$. Par exemple, pour $\lambda = -1$, soit à résoudre le système $\begin{cases} (2+1)x+3y-3z &= 0 \\ x+(2+1)y-z &= 0 \\ x+3y+(-2+1)z &= 0 \end{cases}$. En faisant $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$ et en remarquant que $L_3 = L_2$, on réécrit le système $\begin{cases} -6y &= 0 \\ x+3y-z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= 0 \\ x &= z \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

f) On a ainsi, pour $D = \mathrm{Diag}(-1\ 1\ 2)$, la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui correspond, dans l'ordre croissant des valeurs propres, aux vecteurs propres en colonne.

g) Posons $X = PY$ avec $Y = {}^t(\tilde{x}\ \tilde{y}\ \tilde{z})$. Le système proposé, $X' = AX$ est alors équivalent à $Y' = DY$ qui se résout facilement en $Y = \begin{pmatrix} x_0 e^{-t} \\ y_0 e^{t} \\ z_0 e^{2t} \end{pmatrix}$. En multipliant par P, on obtient $X = \begin{pmatrix} x_0 e^{-t} + z_0 e^{2t} \\ y_0 e^{t} + z_0 e^{2t} \\ x_0 e^{-t} + y_0 e^{t} + z_0 e^{2t} \end{pmatrix}$.

h) La solution qui passe par $X(0) = {}^t(1\ 1\ 1)$ est telle que ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} x_0+z_0 & y_0+z_0 & x_0+y_0+z_0 \end{pmatrix}$.

En soustrayant à la dernière ligne la première ou la seconde, on trouve facilement $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$. Donc $z_0 = 1$. La solution cherchée est donc $X(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$.

Exercice nº 2 a) En développant par rapport à la première ligne, on a $D_3 = 3\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3D_2 = 3 \times -2 = -6$. De même, on obtient $D_4 = -4D_3 = 24$.

b) En développant par rapport à la première ligne, on écrit directement $D_n = (-1)^{n+1} n D_{n-1}$.

c) Comme $(-1)^2 = 1$, on peut réécrire cette formule : $D_n = (-1)^{n-1} n D_{n-1}$. On peut écrire (au brouillon) $D_n = (-1)^{n-1} n \times (-1)^{n-2}(n-1) \times \cdots \times (-1)^1 \times 2 \times D_1$ et donc vraisemblablement supposer que $D_n = (-1)^{s_n} n! D_1 = (-1)^{s_n} n!$, avec $s_n = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$.

Nous le prouvons par récurrence. On a bien $(-1)^{s_1} 1! = 1 = D_1$. On suppose le résultat vrai au rang n. En écrivant d'après c) que $D_{n+1} = (-1)^n (n+1) D_n$, on obtient, d'après l'hypothèse de récurrence : $D_{n+1} = (-1)^n (n+1)(-1)^{s_n} n! = (-1)^{s_n+n} n!(n+1) = (-1)^{s_{n+1}}(n+1)!$. Par récurrence, on a donc bien montré que $D_n = (-1)^{s_n} n!$.

Exercice nº 3 a) Tout d'abord f est clairement linéaire. On a $f(1) = 1 + 2 \times 1(X-1) = 2X - 1$ et $f(X) = X$. La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ s'écrit donc $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b1) V_1 et V_2 sont deux vecteurs non colinéaires (donc libres) et ils sont tous deux valeurs propres de A pour la valeur propre 5. Donc l'espace propre pour 5 est de dimension au moins 2. Comme A est non inversible, 0 est valeur propre de A et l'espace propre associé est de dimension au moins 1. Comme l'espace est de dimension 3, ces inégalités sont des égalités. Donc 0 est vp de A avec multiplicité 1 et 5 avec multiplicité 2.

b2) A est diagonalisable car la somme des dimensions de ses espaces propres est maximale (3).

b3) $AU = 5U = {}^t\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ car $U \in \mathrm{Vect}\{V_1, V_2\} = E_5$ est dans l'espace propre pour la vp 5.