Université Joseph FOURIER - GRENOBLE I

Module MAT 234 — Année 2010-2011

Examen Partiel du mardi 2 novembre 2010

Tous documents et notes manuscriptes interdits.
Calculettes, téléphones portables interdits.
Durée 1h30

Exercice 1 – *Questions théoriques. Toutes les questions sont indépendantes.*

a) [*2 points*] Une base $(u_1, ..., u_n)$ étant donnée dans $I\!R^n$, on considère l'application linéaire $f : I\!R^n \to I\!R^n$ telle que $f(u_i) = u_{i+1}$ pour $i = 1, ..., n-1$ et $f(u_n) = u_1$.

a1) Ecrire la matrice de f dans la base (u_i).

a2) En déduire le déterminant de f.

b) [*2 points*] On considère une application linéaire $f : I\!R^n \to I\!R^n$ et sa matrice associée A dans la base canonique. On suppose que dim(Ker$f$)=1 et que X_1 et X_2 sont deux solutions distinctes du sytème linéaire (S)

$$A\,X = b\,,$$

où b est un vecteur fixé dans $I\!R^n$.

b1) Donner une base du noyau de f.

b2) Donner l'ensemble des solutions du système (S).

c) [*2 points*] Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels, λ un réel et V un vecteur non nul de $I\!R^n$ tel que $AV = \lambda V$.

c1) Soit k un entier tel que $A^k \neq 0$. Donner (en le justifiant) une valeur propre de la matrice A^k.

c2) Soit α un réel non nul. Donner (en le justifiant) une valeur propre de la matrice αA.

Exercice 2 – On considère une application linéaire f de $I\!R^3$ dans $I\!R^3$ et sa matrice associée A dans la base canonique (e_1, e_2, e_3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On considère le vecteur $u = (1, 1, 1)$.

a) [*2 points*] Vérifier que les vecteurs $u_1 = u$, $u_2 = Au$, $u_3 = A^2u$ forment une base de $I\!R^3$.

b) [*3 points*] On note B la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3). Donner la relation entre les matrices A et B en explicitant les matrices de passage P et P^{-1} utilisées.

c) [*1 point*] Calculer la matrice B.

d) [*1 point*] Calculer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A.

e) [*1 point*] *Pour un polynôme* $P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3$ *et une matrice carrée* C*, d'ordre 3, on définit la matrice* $P(C) = \alpha_0 I_3 + \alpha_1 C + \alpha_2 C^2 + \alpha_3 C^3$ *où* I_3 *est la matrice identité d'ordre 3.*

Calculer $P_A(A)$.

Exercice 3 –

a) [*1 point*] Calculer le produit des deux matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b1) [*3 points*] Montrer qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $B = PDP^{-1}$.

b2) [*1 point*] En déduire la diagonalisation de la matrice $A = \frac{1}{4}B$.

c) On considére les suites (u_n), (v_n), (w_n) et (z_n) définies par les valeurs initiales $u_0 = v_0 = 0$, $w_0 = z_0 = 1$ et les relations suivantes :

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{3}{4}w_n\ ,\ v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n - \frac{3}{4}z_n\ ,\ w_{n+1} = -\frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}w_n\ ,\ z_{n+1} = -\frac{3}{4}v_n + \frac{1}{4}z_n\ .$$

c1) [*2 points*] Déterminer u_n, v_n, w_n, z_n en fonction de n.

c2) [*2 points*] Etudier le comportement asymptotique de ces 4 suites.