Université Joseph FOURIER - GRENOBLE I
Module MAT 234 Année 2010-2011

Corrigé de l'examen partiel du mardi 2 novembre 2010

Exercice 1

a)

a1) $$\mathrm{mat}(f;(u_1,\ldots,u_n)) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a2)

$$\begin{aligned} \det(f) &= \begin{vmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n+1}\det(I_{n-1}) \\ &= (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

b)

b1) $AX_1 = b$ et $AX_2 = b$ donc $A(X_1 - X_2) = 0$ donc $X_1 - X_2 \in \mathrm{Ker}(f)$. X_1 et X_2 sont distincts donc $X_1 - X_2 \neq 0$ donc la famille $\{X_1 - X_2\}$ est libre. Puisque $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$, $(X_1 - X_2)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

b2) Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} AX = b &\iff AX = AX_1 \\ &\iff A(X - X_1) = 0 \\ &\iff X - X_1 \in \mathrm{Ker}(f) \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ X - X_1 = \lambda(X_1 - X_2) \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ X = X_1 + \lambda(X_1 - X_2). \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions du système $AX = b$ est donc

$$S = \{X_1 + \lambda(X_1 - X_2),\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

c)

c1) On montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad A^p V = \lambda^p V.$$

– Initialisation : pour $p = 0$, $A^0V = I_nV = V$ et $\lambda^0 V = V$.
– Récurrence : soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^pV = \lambda^p V$, alors

$$A^{p+1}V = A^pAV = A^p\lambda V = \lambda A^pV = \lambda\lambda^pV = \lambda^{p+1}V.$$

En particulier, $A^kV = \lambda^kV$. Comme $V \neq 0$, λ^k est une valeur propre de A^k.
c2) $\alpha AV = \alpha\lambda V$, $V \neq 0$ donc $\alpha\lambda$ est une valeur propre de αA.

Exercice 2

a)

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

donc la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

b) $B = P^{-1}AP$ avec $P = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix}3&-3&1\\-\dfrac{5}{2}&4&-\dfrac{3}{2}\\\dfrac{1}{2}&-1&\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$.

c) $B = \begin{pmatrix}0&0&6\\1&0&-11\\0&1&6\end{pmatrix}$.

d) $P_A(X) = -X^3 + 6X^2 - 11X + 6$.

e)

$$\begin{aligned}P_A(A) &= -A^3 + 6A^2 - 11A + 6I_3\\&= -\begin{pmatrix}1&0&0\\0&8&0\\0&0&27\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix} - 11\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&= \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exercice 3

a)

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

b)

b1)

$$P_B(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 1-X & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)\begin{vmatrix} 1-X & 0 & -3 \\ 0 & 1-X & 0 \\ -3 & 0 & 1-X \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1-X & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)(1-X)[(1-X)^2-9] - 3(-1)(-3)[(1-X)^2-9]$$

$$= [(1-X)^2-9][(1-X)^2-9]$$

$$= [(1-X-3)(1-X+3)]^2$$

$$= (X+2)^2(X-4)^2$$

donc B a deux valeurs propres doubles : -2 et 4.
Calcul des sous-espaces propres :

$$\begin{cases} x & -3z & = & -2x \\ y & -3w & = & -2y \\ -3x & +z & = & -2z \\ -3y & +w & = & -2w \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x & -3z & = & 0 \\ 3y & -3w & = & 0 \\ -3x & +3z & = & 0 \\ -3y & +3w & = & 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x & -z & = & 0 \\ y & -w & = & 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \exists (s,t) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} x & = & s \\ y & = & t \\ z & = & s \\ w & = & t \end{cases}$$

$\operatorname{Ker}(B+2I_4) = \operatorname{Vect}\{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$. La famille $\{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$ est libre donc la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre -2 est égale à 2.

$$\begin{cases} x & -3z & = & 4x \\ y & -3w & = & 4y \\ -3x & +z & = & 4z \\ -3y & +w & = & 4w \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -3x & -3z & = & 0 \\ -3y & -3w & = & 0 \\ -3x & -3z & = & 0 \\ -3y & -3w & = & 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x & +z & = & 0 \\ y & +w & = & 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \exists (s,t) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} x & = & -s \\ y & = & -t \\ z & = & s \\ w & = & t \end{cases}$$

$\text{Ker}(B - I_4) = \text{Vect}\{(-1,0,1,0),(0,-1,0,1)\}$. La famille $\{(-1,0,1,0),(0,-1,0,1)\}$ est libre donc la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 4 est égale à 2.

Ainsi, B est diagonalisable. Si l'on définit la matrice P par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

alors $B = PDP^{-1}$. D'après la question a),

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b2) $A = \frac{1}{4}PDP^{-1} = P\frac{1}{4}DP^{-1}$ donc A est diagonalisable et se diagonalise en la matrice

$$\frac{1}{4}D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c)

c1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note X_n le vecteur $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ z_n \end{pmatrix}$. Pour tout n, on a la relation $X_{n+1} = AX_n$, et on définit le vecteur $Y_n = \begin{pmatrix} u'_n \\ v'_n \\ w'_n \\ z'_n \end{pmatrix}$ par la relation

$$X_n = PY_n.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
X_{n+1} = AX_n &\iff PY_{n+1} = APY_n \\
&\iff PY_{n+1} = \frac{1}{4}PDP^{-1}PY_n \\
&\iff PY_{n+1} = \frac{1}{4}PDY_n \\
&\iff Y_{n+1} = P^{-1}\frac{1}{4}PDY_n \\
&\iff Y_{n+1} = \frac{1}{4}DY_n,
\end{aligned}$$

d'où les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u'_{n+1} & = & -\frac{1}{2}u'_n \\ v'_{n+1} & = & -\frac{1}{2}v'_n \\ w'_{n+1} & = & w'_n \\ z'_{n+1} & = & z'_n \end{cases}$$

On obtient donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u'_n & = & \left(-\frac{1}{2}\right)^n u'_0 \\ v'_n & = & \left(-\frac{1}{2}\right)^n v'_0 \\ w'_n & = & w'_0 \\ z'_n & = & z'_0 \end{cases}.$$

On calcule le vecteur $Y_0 = \begin{pmatrix} u'_0 \\ v'_0 \\ w'_0 \\ z'_0 \end{pmatrix}$ par la formule $Y_0 = P^{-1}X_0$, où $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On obtient $Y_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où les expressions :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u'_n & = & (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ v'_n & = & (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ w'_n & = & \frac{1}{2} \\ z'_n & = & \frac{1}{2} \end{cases}.$$

En utilisant la formule $X_n = PY_n$, on en déduit les expressions suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_n &= (-1)^n \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} - \dfrac{1}{2} \\ v_n &= (-1)^n \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} - \dfrac{1}{2} \\ w_n &= (-1)^n \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} + \dfrac{1}{2} \\ z_n &= (-1)^n \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} + \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

c2) $-1 < 1/2 < 1$ donc $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$. Comme $\left|(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, on en déduit les limites des suites :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = -1/2, \qquad \lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} z_n = 1/2.$$