Université de Grenoble I Année 2013-2014

Module MAT 234

CC1 : examen partiel du jeudi 07 novembre 2013

Tous documents et notes manuscrites interdits – Calculettes, téléphones portables interdits.

Durée 1h30

Exercice 1 –

On considère la fonction de deux variables définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
2. Bonus. Déterminer et tracer la ligne de niveau $L_0 = \{(x,y) \in \mathcal{D}_f,\ f(x,y) = 0\}$.
3. On considère le domaine Δ défini par

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

   Représenter graphiquement le domaine Δ.

4. Calculer l'intégrale double I en effectuant un changement de variables approprié

$$I = \iint_\Delta f(x,y)\, dxdy\,.$$

Exercice 2 –

On considère le changement de variables

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (u = 3x+2y,\ v = x+y) \end{array}$$

1. Vérifier que l'application φ est bijective et expliciter l'application φ^{-1} (*on exprimera donc x et y en fonction de u et v*).
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles

$$2\,\frac{\partial f}{\partial x} - 3\,\frac{\partial f}{\partial y} = \sin(x+y)$$

   à l'aide du changement de variables définie par φ.

Exercice 3 –

On considère la fonction de deux variables définie par

$$f(x,y) = x^3 + y^2\, e^x\,.$$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Calculer la matrice hessienne de f au point (x,y) :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}.$$

   Peut-on en déduire la nature des points critiques de f ?

3. Tracer les coupes de la surface représentative de f par les plans $x = 0$ et $y = 0$.
4. En déduire la nature du point critique $(0,0)$.

Exercice 4 –

Déterminer la droite de régression linéaire (droite dite "aux moindres carrées") associée aux 3 points de coordonnées $(1,2)$, $(4,2)$, $(7,5)$.