Université de Grenoble I Année 2013-2014
Module MAT 234

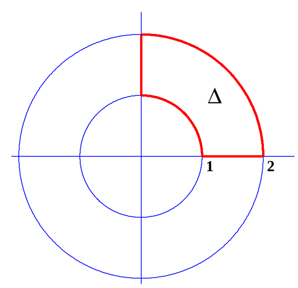
CC1 : examen partiel du jeudi 07 novembre 2013

CORRIGÉ.

Exercice 1 –

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

1. La racine carrée et le sinus sont définis pour tout $(x,y) \in I\!R^2$. Cependant la racine carrée au dénominateur ne doit pas s'annuler.
   $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in I\!R^2,\ \sqrt{x^2+y^2} \neq 0\} \ = I\!R^2 - \{(0,0)\}$.
2. La ligne de niveau L_0 est la réunion des cercles centrés à l'origine et de rayon entier strictement positif. En effet, pour $(x,y) \in \mathcal{D}_f$, on a :
$$\begin{aligned} f(x,y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right) = 0\,, \\ &\Leftrightarrow \quad \pi\sqrt{x^2+y^2} \ = \ k\,\pi, \quad k \in I\!N^*\,, \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} \ = \ k, \quad k \in I\!N^*\,. \end{aligned}$$
3. $$\Delta = \{(x,y) \in I\!R^2 \quad \text{tel que} \quad 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$



4. On effectue un changement de variables en coordonnées polaires, $h :\ (r,\theta) \mapsto (x = r\,\cos\theta, y = r\,\sin\theta)$.
   Le domaine Δ devient $\Delta' = h^{-1}(\Delta) = \{(r,\theta) \in I\!R^{+*} \times [0, 2\pi[,\ \ 1 \leq r \leq 2,\ \ 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$.
   Ainsi :
$$\begin{aligned} I \ &= \iint_\Delta f(x,y)\,dxdy \ = \ \iint_{\Delta'} f\circ h(r,\theta)\ \ |J_h(r,\theta)|\ \ drd\theta \ = \ \iint_{[1,2]\times[0,\pi/2]} \tfrac{1}{r}\sin(\pi\,r)\,r\,drd\theta\,, \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi/2}\left(\int_{r=1}^{2}\sin(\pi\,r)\,dr\right)d\theta \ = \ \int_{\theta=0}^{\pi/2}\Big[-\tfrac{1}{\pi}\cos(\pi\,r)\Big]_1^2\,d\theta \ = \ \left(-\tfrac{2}{\pi}\right)\ \Big[\theta\Big]_{\theta=0}^{\pi/2} \ = \ -1. \end{aligned}$$

Exercice 2 –

$$\varphi : \begin{array}{ccc} I\!R^2 & \longrightarrow & I\!R^2 \\ (x,y) & \mapsto & (u = 3x+2y,\ v = x+y) \end{array}$$

1. Un calcul élémentaire conduit à
$$\left\{\begin{array}{lcl} u &=& 3x+2y \\ v &=& x+y \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} x &=& u-2v \\ y &=& -u+3v \end{array}\right.\,,$$
   d'où l'on déduit que φ est bijective : $\forall\,(u,v) \in I\!R^2$, $\exists!\,(x,y) \in I\!R^2$, tel que $\varphi(x,y) = (u,v)$.
   Ainsi :
$$\varphi^{-1} : \begin{array}{ccc} I\!R^2 & \longrightarrow & I\!R^2 \\ (u,v) & \mapsto & (x = u-2v,\ y = -u+3v) \end{array}$$
2. Afin de résoudre l'équation (E) : $2\,\dfrac{\partial f}{\partial x} - 3\,\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin(x+y)$, on considère le changement de variable φ ainsi que la nouvelle fonction inconnue g définie par $g = f\circ\varphi^{-1}\ : (u,v) \mapsto g(u,v)$ de sorte que $f = g\circ\varphi$, c'est-à-dire $f(x,y) = g\big(u(x,y), v(x,y)\big)$.
   La dérivation des fonctions composées conduit alors à :
$$\left\{\begin{array}{lcccl} \dfrac{\partial f}{\partial x} &=& \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} &=& 3\,\dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} &=& \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} &=& 2\,\dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{array}\right.\,,$$

puis en reportant dans (E), on obtient l'équation que doit satisfaire g :

$$2\left(3\,\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\right) - 3\left(2\,\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\right) = \sin v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial v} = -\sin v\,,$$

ce qui conduit à la solution $g(u,v) = \cos v + h(u)$, où h est une fonction réelle quelconque de classe C^1, puis finalement à la solution $f = g \circ \varphi$ de l'équation (E), définie par :

$$f(x,y) = \cos(x+y) + h(3x+2y), \quad h \in \mathcal{C}^1(I\!R).$$

Exercice 3 –

$$f(x,y) = x^3 + y^2\,e^x\,.$$

1. Les points critiques de f annulent le gradient de f :

$$\left\{\begin{array}{lcrl} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & 3x^2 + y^2\,e^x & = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & 2y\,e^x & = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 3x^2 = 0 \\[2ex] \;y = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0\,,$$

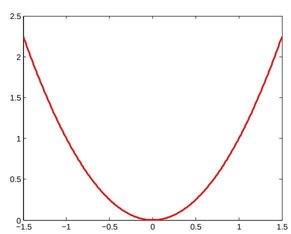
car l'exponentielle ne s'annule pas. Ainsi, f admet un <u>unique</u> point critique en $(0,0)$.

2. Matrice hessienne de f au point (x,y) :

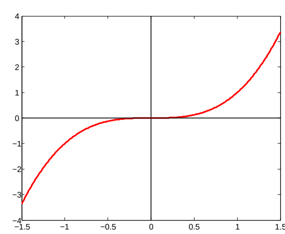
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\[3ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x + y^2\,e^x & 2y\,e^x \\[2ex] 2y\,e^x & 2e^x \end{pmatrix}.$$

Le déterminant $\det\Big(H_f(0,0)\Big) = rt - s^2 = 0$, de sorte qu'on ne peut pas conclure quant à la nature du point critique $(0,0)$ à l'aide de la hessienne.

3. Les coupes de la surface représentative de f par les plans $x = 0$ et $y = 0$ sont illustrées par les 2 courbes ci-dessous.



Coupe $x = 0$
$y \mapsto f(0,y) = y^2$



Coupe $y = 0$
$x \mapsto f(x,0) = x^3$

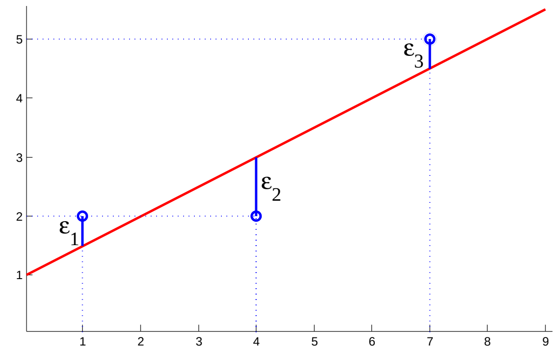
4. La coupe $y = 0$ montre que le point critique $(0,0)$ est un point selle.

Exercice 4 –

La droite de régression linéaire $Y = a\,X + b$, associée aux points de coordonnées (x_i, y_i), $i = 1, 2, ..., n$, est obtenue en minimisant la somme des erreurs au carré, à savoir la quantité $E(\epsilon_i^2 + \cdots + \epsilon_n^2)$ avec $\epsilon_i = y_i - (a\,x_i + b)$.
La méthode du cours montre que les paramètres optimaux $\hat{a}$ et $\hat{b}$ selon ce critère sont solutions du système linéaire

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i y_i \\ \sum y_i \end{pmatrix}$$

Soit ici : $\begin{pmatrix} 66 & 12 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \hat{a} = 1/2 \\ \hat{b} = 1 \end{array}$



La droite de régression linéaire cherchée est donc $Y = \frac{1}{2}\,X + 1$.