

# UE MAT234

## Notes de cours sur l'algèbre linéaire

### Matrices - Systèmes linéaires - Déterminants - Diagonalisation

Dans tout ce document,  $K$  désigne indifféremment le corps des nombres réels  $\mathbb{R}$  ou celui des nombres complexes  $\mathbb{C}$ .  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels, de dimensions respectives  $n$  et  $p$ .

## 1 Matrices

### 1.1 Rappels : espaces vectoriels

#### Définitions

Un ensemble  $E$  est un espace vectoriel sur  $K$  s'il est muni de 2 lois :

– une addition interne d'éléments de  $E$  :

$$E \times E \rightarrow E, \quad (u, v) \mapsto u + v$$

– une multiplication externe d'éléments de  $E$  par des scalaires de  $K$  :

$$K \times E \rightarrow E, \quad (\lambda, u) \mapsto \lambda u$$

telles que

–  $(E, +)$  soit un groupe commutatif : l'addition interne d'éléments de  $E$  est associative, commutative, possède un élément neutre ( $\exists e \in E, \forall u \in E, u + e = u = e + u$ ), et tout élément de  $E$  a un opposé pour l'addition ( $\forall u \in E, \exists u' \in E, u + u' = u' + u = e$ ).

– la multiplication externe vérifie :

$$\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v, \quad \forall \lambda, \mu \in K, \forall v \in E,$$

$$1v = v, \quad \forall v \in E,$$

$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v, \quad \forall \lambda, \mu \in K, \forall v \in E,$$

$$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v, \quad \forall \lambda \in K, \forall u, v \in E.$$

L'élément neutre  $e$  est noté  $0_E$  et l'opposé de  $u$  est noté  $-u$ .

#### Exemples

- L'espace  $\mathbb{R}^n$ , l'ensemble des suites réelles,
- L'espace des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$
- L'ensemble des solutions de l'équation différentielle :  $ay'' + by' + cy = 0$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

→ Dans la suite on considère des espaces vectoriels non nuls.

#### Combinaison linéaire

Soit :  $u_1, u_2, \dots, u_K \in E$  et  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K \in K$ , alors

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_K u_K = \sum_{i=1}^K \lambda_i u_i \in E$$

est une combinaison linéaire (CL) des vecteurs  $u_i$  dont les coefficients sont les  $\lambda_i$ .

## Famille libre, liée, génératrice

- La famille  $(u_1, \dots, u_q)$  de vecteurs de  $E$  est dite libre (ou linéairement indépendante) si aucun de ces vecteurs ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres, c'est-à-dire si toute combinaison linéaire nulle des vecteurs  $u_i$  ne peut être obtenue qu'à partir de coefficients tous nuls, soit :

$$\begin{cases} \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q \in K \\ \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_q u_q = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_q = 0.$$

- Sinon cette famille est dite liée.  
Remarque : toute famille contenant le vecteur nul  $0_E$  est liée.
- La famille  $(u_1, \dots, u_q)$  est dite génératrice dans  $E$  si tout vecteur de  $E$  peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs  $u_1, \dots, u_q$ , autrement dit, si

$$\forall u \in E, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_q \in K, \text{ tel que } u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_q u_q.$$

## Base

### – Définition :

Une base est une famille de vecteurs de  $E$  qui est à la fois libre et génératrice.

### – Dimension finie :

Un espace vectoriel  $E$  est dit de dimension finie, notée  $\dim E$ , s'il admet une base ayant un nombre fini de vecteurs.

L'espace vectoriel nul (réduit au seul élément 0) est de dimension 0.

### – Propriétés :

Si  $E$  est de dimension finie  $n$ , alors :

- $E$  admet une infinité de bases,
- toutes les bases de  $E$  ont même nombre d'éléments,
- toute famille libre de  $n$  éléments est une base de  $E$ ,
- toute famille génératrice de  $n$  éléments est une base de  $E$ .
- Si  $v_1, \dots, v_n$  est une base de  $E$ , tout vecteur  $u$  de  $E$  s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs  $v_i$ , soit :

$$\forall u \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n, \text{ tel que } u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Les réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont les composantes du vecteur  $u$  dans la base (ou relativement à la base) des  $v_i$ .

## Sous espace vectoriel

- $F \subset E$  est un sous espace vectoriel de  $E$  si  $F$  est non vide et stable par combinaisons linéaires :

$$F \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall \lambda, \mu \in K, \forall u, v \in F, \lambda u + \mu v \in F.$$

- Un sous espace vectoriel est un espace vectoriel.
- Si  $E$  est de dimension finie  $n$  alors  $F$  est de dimension finie  $p \leq n$ .
- L'intersection de 2 sous espaces vectoriels est un (sous) espace vectoriel.
- L'union de 2 sous espaces vectoriels n'est généralement pas un (sous) espace vectoriel.

## Sous espace engendré

- Soit  $u_1, \dots, u_K$  des vecteurs de  $E$ .

Le sous espace engendré par ces vecteurs est l'ensemble de toutes les CL de ces vecteurs :

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_K) = \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_K u_K, \lambda_1, \dots, \lambda_K \in K\}$$

- $\text{Vect}(u_1, \dots, u_K)$  est un sous espace vectoriel de  $E$  : c'est le plus petit sous espace vectoriel de  $E$  contenant  $u_1, \dots, u_K$ .
- $\text{Vect}(u_1) = K.u_1$  est la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $u_1$  ( $u_1 \neq 0$ ).
- $\text{Vect}(u_1, u_2)$  est le plan vectoriel engendré par les vecteurs  $u_1, u_2$  (non colinéaires).
- Soit  $P$  une partie quelconque non vide de  $E$ , alors  $\text{Vect}(P)$  est l'ensemble de toutes les CL finies d'éléments de  $P$ . C'est le plus petit sous espace vectoriel de  $E$  contenant  $P$ .

## Somme de sous espaces vectoriels

- **Définition :**

- Soit  $E_1$  et  $E_2$  deux sous espaces vectoriels de  $E$ . La somme  $E_1 + E_2$  est l'ensemble de toutes les sommes d'un vecteur de  $E_1$  et d'un vecteur de  $E_2$  :

$$E_1 + E_2 = \{u_1 + u_2, u_1 \in E_1, u_2 \in E_2\}$$

- $E_1 + E_2$  est un sous espace vectoriel de  $E$  : c'est le plus petit sous espace vectoriel de  $E$  contenant  $E_1$  et  $E_2$ , soit

$$E_1 + E_2 = \text{Vect}(E_1 \cup E_2).$$

- Si  $\dim E$  est finie, alors

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2).$$

- **Somme directe :**

- La somme  $F$  de  $E_1$  et  $E_2$  est dite directe si tout élément de  $F$  s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de  $E_1$  et d'un élément de  $E_2$  :

$$\forall u \in F, \exists! u_1 \in E_1, \exists! u_2 \in E_2 \text{ tel que } u = u_1 + u_2.$$

La décomposition est dite unique et la somme est alors notée

$$E_1 \oplus E_2.$$

- On montre que la somme est directe si et seulement si

$$E_1 \cap E_2 = \{0_E\}.$$

- Si  $\dim E$  est finie, on a alors

$$\dim(E_1 \oplus E_2) = \dim E_1 + \dim E_2.$$

- **Sous espaces supplémentaires :**

- Deux sous espaces vectoriels  $E_1$  et  $E_2$  de  $E$  sont dits supplémentaires (dans  $E$ ) si  $E = E_1 \oplus E_2$ .

- Si  $v_1, \dots, v_p$  est une base de  $E_1$  et si  $w_1, \dots, w_q$  est une base de  $E_2$ , alors  $v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q$  est une base de  $E$ .

- On définit de même la somme directe de  $k$  sous espaces vectoriels  $E_i$  de  $E$  :

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_k.$$

## 1.2 Matrices : définitions

**Déf** On appelle **matrice de taille**  $p \times n$  un tableau à double entrée, comportant  $p$  lignes et  $n$  colonnes, et dont chaque élément (encore appelé coefficient) appartient à  $K$ . L'élément  $a_{ij}$  appartenant à la  $i$ -ème ligne et à la  $j$ -ème colonne est appelé **élément d'indice**  $(i, j)$  de la matrice  $A = (a_{ij})$ .

**Déf** L'ensemble des matrices de taille  $p \times n$  à éléments dans  $K$  est noté  $\mathcal{M}_{p,n}(K)$ .

**Déf** L'ensemble des matrices de taille  $n \times n$  à éléments dans  $K$ , dites **matrices carrées**, est noté  $\mathcal{M}_n(K)$ .

$$A \text{ appartenant à } \mathcal{M}_{p,n}(K) \text{ est notée } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$$

**Prop**  $\mathcal{M}_{p,n}(K)$  est un espace vectoriel sur  $K$ , de dimension  $pn$ . Sa base canonique est  $\{E_{ij}, 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n\}$  où  $E_{ij}$  est la matrice dont tous les éléments sont nuls, sauf celui d'indice  $(i, j)$  qui vaut 1. Ainsi toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_{p,n}(K)$  s'écrit de manière unique

$$A = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}.$$

### 1.2.1 Quelques matrices carrées particulières

**Déf** Matrice identité de taille  $n \times n$  :  $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$  ( $I_n(i, j) = 1$  si  $i = j$ , 0 sinon).

**Déf** Matrice diagonale :  $D = \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn} \end{pmatrix}$  ( $D(i, j) = 0$  si  $i \neq j$ ).

**Déf** Matrice triangulaire supérieure :  $T = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & t_{nn} \end{pmatrix}$  ( $T(i, j) = 0$  si  $i > j$ ).

**Déf** Matrice triangulaire inférieure :  $T = \begin{pmatrix} t_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$  ( $T(i, j) = 0$  si  $i < j$ ).

**Déf** Matrice triangulaire inférieure (ou supérieure) stricte : Matrice triangulaire inférieure (ou supérieure) dont la diagonale est nulle.

**Déf** Matrice bande de largeur  $2m + 1$  :  $A(i, j) = 0$  si  $|i - j| > m$ . Pour  $m = 1$  on parle de matrice **tridiagonale**.

### 1.2.2 Transposition

**Déf** Soit  $A \in \mathcal{M}_{pn}(K)$ . On appelle **transposée de  $A$** , notée  $A^t$ , la matrice de  $\mathcal{M}_{np}(K)$  définie par  $A^t(i, j) = A(j, i)$ .

**Déf**  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  (donc carrée) est **symétrique** ssi  $A^t = A$ .

**Déf**  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  est **antisymétrique** ssi  $A^t = -A$ . (donc de diagonale nulle).

**Prop**  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  peut être décomposée de façon unique en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique :  $A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$ . On en déduit que  $\mathcal{M}_n(K)$  est la somme directe du sous-espace vectoriel des matrices symétriques de taille  $n$  et du sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de taille  $n$ .

### 1.2.3 Produit de matrices

**Déf** Soient  $A \in \mathcal{M}_{pn}(K)$  et  $B \in \mathcal{M}_{nq}(K)$ . On définit alors la matrice  $AB \in \mathcal{M}_{pq}(K)$  par  $(AB)(i, j) = \sum_{k=1}^n A(i, k) B(k, j)$ . Attention : on voit que le produit  $AB$  n'est défini que si le nombre de colonnes de  $A$  est égal au nombre de lignes de  $B$ .

**Rmq** Disposition pour les calculs

**Rmq** Action d'une matrice sur un vecteur colonne

Soit  $A \in \mathcal{M}_{pn}(K)$  et  $x \in K^n$  représenté par le vecteur colonne  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ .

La décomposition de la matrice  $A$  en colonnes permet d'écrire  $A = (A_1, \dots, A_n)$ . Ainsi,  $Ax = x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_nA_n$  est donc une CL des colonnes de  $A$ .

**Prop** Le produit de matrices est associatif :  $A(BC) = (AB)C$ , et distributif par rapport à l'addition :  $A(B + C) = AB + AC$ .

Par contre il n'est pas commutatif :  $AB \neq BA$  en général, même si  $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ .

Ainsi  $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$  en général.

**Prop**  $(AB)^t = B^tA^t$

**Prop** Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).

**Prop** Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.

**Déf** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(K)$ . On appelle **matrice inverse** de  $A$ , notée  $A^{-1}$ , la matrice de  $\mathcal{M}_n(K)$  vérifiant  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ , si elle existe.

**Prop** Si  $A$  inversible, son inverse  $A^{-1}$  est unique.

**Prop** Pour  $A$  et  $B$  inversibles, on a :  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

**Prop** Pour  $A$  inversible, on a :  $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$ .

**Rmq**  $AB = AC$  ne conduit pas à  $B = C$ .

### 1.2.4 Manipulation par blocs des matrices

On peut, pour simplifier dans certains cas les calculs matriciels, adopter une écriture par blocs. Ceci a de l'intérêt si certains blocs sont particulièrement simples (par exemple nuls, ou égaux à une matrice identité). Les manipulations sont identiques aux calculs matriciels usuels. Il faut simplement s'assurer de la compatibilité des tailles de blocs lors des opérations (cf exemples dans les fiches de TD).

**Attention :** la forme réelle des matrices n'est pas équivalente à la forme par blocs. Par exemple une matrice triangulaire par blocs n'est pas nécessairement triangulaire. De même l'écriture par blocs d'une matrice triangulaire n'est pas nécessairement triangulaire par blocs. Par contre, toute matrice triangulaire peut être écrite sous forme triangulaire par blocs. Et de même pour des matrices, diagonales, bandes, etc.

## 1.3 Représentation matricielle d'une application linéaire

### 1.3.1 Application linéaire

**Déf** Une application  $\varphi$  de  $E$  dans  $F$  est linéaire si et seulement si

$$\forall u, v \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda \varphi(u) + \mu \varphi(v)$$

**Prop** Une application linéaire  $\varphi$  de  $E$  dans  $F$  (dim  $E$  finie) est complètement déterminée par la connaissance de l'image d'une base.

En effet, soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$  son image par  $\varphi$ .

Tout vecteur  $u$  de  $E$  s'écrit de manière unique  $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , de sorte que

$$\varphi(u) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i)$$

s'écrit comme CL des vecteurs  $\varphi(e_i) \in F$ .

**Déf** Soit  $\varphi : E \rightarrow F$  linéaire

Noyau de  $\varphi$  :  $\text{Ker } \varphi = \{x \in E, \varphi(x) = 0_F\}$

Image de  $\varphi$  :  $\text{Im } \varphi = \varphi(E) = \{y \in F, \exists x \in E, \varphi(x) = y\}$

**Déf** Rang d'une application linéaire ( $\dim E$  finie) :  $\text{rang}(\varphi) = \dim(\text{Im}(\varphi))$ .

Puisque  $\text{Im}(\varphi)$  est engendré par les vecteurs  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ , pour une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ , le rang de  $\varphi$  est le nombre maximum de vecteurs  $\varphi(e_j)$  linéairement indépendants.

**Prop** Théorème du rang (pour une application linéaire  $\varphi : E \rightarrow F$ , avec  $\dim E$  finie)

$$\dim \text{Ker} \varphi + \dim \text{Im} \varphi = \dim E.$$

### 1.3.2 Représentation matricielle

Soit  $\varphi$  une application linéaire de  $E$  vers  $F$ . Soient  $\mathcal{B}_E = \{e_1, \dots, e_n\}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}_F = \{f_1, \dots, f_p\}$  une base de  $F$ . Pour chaque  $e_j$ ,  $\varphi(e_j) \in F$  et peut donc être décomposé de façon unique sur la base  $\{f_1, \dots, f_p\}$  :  $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^p a_{ij} f_i$

On pose :  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$

**Déf**  $A$  est la **matrice représentative** de l'application linéaire  $\varphi$  dans les bases  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$ . On remarque que chaque colonne  $j$  de  $A$  contient les coefficients de  $\varphi(e_j)$ .

Soit  $x \in E$ . Notons  $y = \varphi(x)$ . On peut décomposer  $x$  dans la base  $\mathcal{B}_E$  :  $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$  et  $y$  dans

la base  $\mathcal{B}_F$  :  $y = \sum_{i=1}^p y_i f_i$ . Or  $y = \varphi(x) = \sum_{j=1}^n x_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^p a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^p \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) f_i$ .

En posant  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ , on a donc  $Y = AX$ .

**Prop**  $y = \varphi(x)$  est équivalent à l'écriture matricielle  $Y = AX$ , où  $X$  et  $Y$  sont les coordonnées de  $x$  et  $y$  dans les bases  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$ , et où  $A$  est la matrice représentative de  $\varphi$  dans les bases  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$ .

$$\varphi : E_{(e_1, \dots, e_n)} \longrightarrow F_{(f_1, \dots, f_p)} \quad (1)$$

$$x \mapsto \varphi(x) = y \quad (2)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto AX = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \quad (3)$$

**Prop** Matrice de l'identité  $I_d : E \longrightarrow E$ ,  $x \mapsto I_d(x) = x$ , avec  $E$  muni de la base  $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ , au départ et à l'arrivée. Alors,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(I_d) = I_n$

**Rmq** Attention - si les bases au départ et à l'arrivée pour l'espace vectoriel  $E$  sont différentes, alors l'identité n'est pas représentée par  $I_n$ .

**Prop** Composée d'applications linéaires.

Considérons les applications linéaires suivantes où  $E, F, G$  sont de dimension finie.

$$\varphi : E \longrightarrow F, \quad \psi : F \longrightarrow G$$

Alors,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(\psi \circ \varphi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(\psi) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi)$$

**Prop** Si  $\varphi$  est bijective de  $E$  dans  $F$  (de sorte que  $\dim E = \dim F$ ), alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi)$  est inversible et

$$\left( \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi) \right)^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi^{-1})$$

**Déf** Rang d'une matrice.

1) Si  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi)$ , alors,  $\text{rang}(A) := \text{rang}(\varphi) = \dim(\text{Im}(\varphi))$ .

2) Pour une matrice quelconque  $A \in \mathcal{M}_{pn}(K)$ , on remarque que  $A$  définit une application linéaire de  $K^n$  dans  $K^p$  :  $A : K^n \rightarrow K^p$ ,  $X \mapsto AX$ , de sorte que le **rang** de  $A$  est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de  $A$ . Autrement dit, c'est le nombre maximum de vecteurs colonnes de  $A$  linéairement indépendants les uns des autres.

**Prop**  $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^t)$

## 1.4 Changement de base

### 1.4.1 Matrice de passage

Soit  $\mathcal{B}'_E = \{e'_1, \dots, e'_n\}$  une autre base de  $E$ . Chaque  $e'_j$  peut être décomposé dans la base  $\mathcal{B}_E$  :  $e'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i$ . Notons  $P = (p_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ .

**Déf**  $P$  est la **matrice de passage** de la base  $\mathcal{B}_E$  à la base  $\mathcal{B}'_E$

Pour  $x \in E$ , on note  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$  ses coordonnées dans  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}'_E$ . On

a alors :  $\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{X}'$ .

### 1.4.2 Changement de base pour une application linéaire

Soit  $\mathcal{B}'_F = \{f'_1, \dots, f'_p\}$  une autre base de  $F$ . On note  $Q$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}_F$  à  $\mathcal{B}'_F$ . Pour  $\varphi$  une application linéaire de  $E$  vers  $F$ , on note  $A$  sa matrice représentative dans  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$ , et  $B$  sa matrice représentative dans  $\mathcal{B}'_E$  et  $\mathcal{B}'_F$ .

Soit  $x \in E$  et  $y = \varphi(x)$ . On note  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$  et  $Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_p \end{pmatrix}$  les coordonnées de  $x$  et  $y$  dans les différentes bases. On a :  $Y = QY' = QBX'$  et  $Y = AX = APX'$ , et ceci pour tous  $x$  et  $y$ . D'où la relation :  $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ .

Dans le cas particulier où  $E = F$  (c.a.d. où  $\varphi$  est un endomorphisme), la relation précédente devient  $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ .

## 2 Chapitre 2 : Systèmes linéaires

En l'absence de précisions, l'espace vectoriel  $K^m$ , ( $m > 0$ ), sera supposé muni de sa base canonique.

• Soit  $A \in \mathcal{M}_{pn}(K)$  et  $b \in K^p$ . On s'intéresse à la résolution du système linéaire  $AX = b$ , c'est à dire à trouver  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$  vérifiant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases} \quad (S)$$

•  $A$  définit une application linéaire de  $K^n$  dans  $K^p$  :

$$A : K^n \longrightarrow K^p, \quad X \mapsto AX,$$

ce qui permet de définir le noyau  $\text{Ker}A$  (sous espace vectoriel de  $K^n$ ) et l'image  $\text{Im}A$  (sous espace vectoriel de  $K^p$ ).

### 2.1 Existence et unicité de solutions

**Déf** Au système  $(S)$ , on associe le **système homogène**  $(S_0) : AX = 0$ . Le vecteur nul est évidemment une solution de  $(S_0)$ .

**Prop** L'ensemble  $\mathcal{S}_0$  des solutions de  $(S_0)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^p$ .  
Précisément :  $\mathcal{S}_0 = \text{Ker}A$ .

**Prop** L'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de  $(S)$  est obtenu en ajoutant à une solution particulière quelconque de  $(S)$  l'ensemble des solutions de  $(S_0)$ .

Précisément :

si  $b \notin \text{Im}A$ , alors  $\mathcal{S} = \emptyset$ .

si  $b \in \text{Im}A$ , alors  $\mathcal{S} = \tilde{X} + \mathcal{S}_0$ , où  $\tilde{X}$  est une solution quelconque de  $(S)$ .

Preuve - Si  $X$  est une solution quelconque de  $(S)$ , alors  $AX - A\tilde{X} = A(X - \tilde{X}) = b - b = 0_{K^p}$ , de sorte que  $X - \tilde{X} \in \text{Ker}A$ .

**Prop** Si  $\text{rang} A = n$  (nombre de colonnes),  $(S)$  admet au plus une solution.

Preuve - On décompose la matrice  $A = (A_1, \dots, A_n)$  en  $n$  colonnes. Alors  $\text{Im}(A) = \text{Vect}(A_1, \dots, A_n)$  et puisque  $\text{rang} A = n$ , les vecteurs colonnes de  $A$  sont linéairement indépendants et forment donc une base de  $\text{Im}(A)$ . Ensuite :

Si  $b \notin \text{Im}A$ , alors  $\mathcal{S} = \emptyset$ .

Si  $b \in \text{Im}A$ , alors  $\exists X \in K^n$  tel que  $AX = b$ , c-à-d, tel que  $(A_1, \dots, A_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$ ,

c-à-d, tel que  $\sum_{j=1}^n x_j A_j = b$ . Finalement, puisque  $b \in \text{Im}(A)$  s'écrit de manière unique dans la base des  $A_j$ , la solution  $X$  est unique.

**Prop** Si  $A$  est de taille  $n \times n$  et si  $\text{rang } A = n$ , alors  $(S)$  admet une et une seule solution.

Preuve - Théorème du rang  $\Rightarrow A$  inversible.

## 2.2 Résolution d'un système triangulaire

Soit à résoudre  $AX = b$  avec  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  triangulaire inférieure.  $(S)$  s'écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} a_{11} x_1 & & = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 & & = b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n & = & b_n \end{cases} \quad (S_T)$$

**Prop**  $A$  est de rang  $n$  ssi  $a_{ii} \neq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n$

Preuve -  $A$  est de rang  $n \Leftrightarrow A$  est inversible  $\Leftrightarrow AX = b$  admet une unique solution  $\forall b \in K^n$   
 $\Leftrightarrow$  les  $a_{ii}$  sont tous non nuls d'après la résolution décrite ci-dessous.

**Résolution de  $(S_T)$**  On suppose que les éléments diagonaux  $a_{ii}$  sont tous non-nuls.  $(S_T)$  admet donc une solution unique, qu'on obtient par descente du système et substitution :

$$\begin{cases} x_1 = b_1/a_{11} \\ x_2 = (b_2 - a_{21} x_1)/a_{22} \\ \vdots \\ x_n = (b_n - a_{n1} x_1 - \cdots - a_{n,n-1} x_{n-1})/a_{nn} \end{cases}$$

Le **coût de cette résolution**, c.a.d. le nombre d'opérations nécessaires pour cet algorithme, est d'environ  $n^2/2$  additions/soustractions, et  $n^2/2$  multiplications/divisions. (on sépare ainsi ces deux types d'opérations, car les multiplications et divisions coûtent en général nettement plus cher en temps de calcul que les additions ou soustractions).

La méthode est évidemment identique pour un système triangulaire supérieur, en commençant par la dernière ligne et en remontant le système.

## 2.3 Méthode de Gauss

On considère le système  $(S)$  pour une matrice  $A$  carrée de rang  $n$ . Notons  $L_k$  la  $k$ -ème ligne de  $(S)$ . La méthode d'élimination de Gauss consiste à réaliser les étapes suivantes :

- **1ère étape** Si  $a_{11} \neq 0$ , on élimine  $x_1$  dans les lignes 2 à  $n$  par la transformation

$L_i \rightarrow L_i^{(2)} = L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$  pour  $i = 2, \dots, n$ . On obtient donc le système :

$$\begin{cases} a_{11}^{(2)} x_1 + a_{12}^{(2)} x_2 + \cdots + a_{1n}^{(2)} x_n = b_1^{(2)} \\ a_{22}^{(2)} x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)} x_n = b_2^{(2)} \\ \vdots \\ a_{n2}^{(2)} x_2 + \cdots + a_{nn}^{(2)} x_n = b_n^{(2)} \end{cases}$$



## 2.4 Décomposition LU

La première étape de la méthode de Gauss s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix},$$

soit :  $N_1 A = A^{(2)}$ , où la matrice  $N_1$  est triangulaire inférieure, avec des 1 sur la diagonale, tandis que  $A^{(2)}$  est la matrice déduite de  $A$  à l'issue de la première étape de la méthode de Gauss.

L'étape  $k$  s'écrit matriciellement de manière analogue :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & 0 \\ \vdots & & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & -\frac{a_{k+1,k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\frac{a_{n,k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & \cdots & a_{k-1,n}^{(k-1)} \\ \vdots & & & 0 & a_{kk}^{(k)} & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nk}^{(k)} & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix} = A^{(k+1)}$$

soit :  $N_k A^{(k)} = A^{(k+1)}$ .

Après  $n - 1$  étapes, on obtient donc :

$$(N_{n-1} \cdots N_2 N_1) A = A^{(n)} = U$$

où  $U$  est une matrice triangulaire supérieure. Les matrices  $N_k$  sont triangulaires inférieures avec des 1 sur la diagonale, de sorte que la matrice  $L = (N_{n-1} \cdots N_2 N_1)^{-1}$  existe et est triangulaire inférieure.

Finalement,

$$L^{-1} A = U \Rightarrow A = LU.$$

- La méthode de Gauss fait donc implicitement la décomposition  $A = LU$ , où  $L$  est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et  $U$  est triangulaire supérieure ( $U$  est en fait la matrice triangulaire obtenue en fin d'algorithme d'élimination). Connaître explicitement cette décomposition peut réduire énormément les coûts de calcul si l'on a à résoudre plusieurs systèmes  $AX = b$  avec différents seconds membres  $b$ . En effet, résoudre  $LUX = b$  revient simplement à résoudre  $LY = b$  puis  $UX = Y$ , c'est à dire deux systèmes triangulaires. Ainsi, si l'on connaît la décomposition  $LU$ , le coût de la résolution passe à seulement  $2 \times n^2/2 = n^2$ , au lieu de  $n^3/3$  pour la méthode de Gauss.

**Prop** Lorsqu'elle existe, la décomposition  $LU$  est unique.

• L'obtention de la décomposition  $LU$  se fait par exemple par l'algorithme de **réduction de Crout**, qui consiste à écrire formellement l'égalité  $A = LU$ , et à identifier successivement les éléments de la première ligne de  $A$  (ce qui donne la première ligne de  $U$ ), puis ceux de la première colonne de  $A$  (ce qui donne la première colonne de  $L$ ), puis ceux de la deuxième ligne de  $A$  (ce qui donne la deuxième ligne de  $U$ ), etc.

**Coût de cet algorithme** : on retrouve, ce qui est logique, le coût de la méthode de Gauss, c'est à dire environ  $n^3/3$  additions/soustractions, et  $n^3/3$  multiplications/divisions. Autrement dit, la décomposition  $LU$  ne réduit pas le coût de calcul si l'on n'a qu'une seule résolution de système à effectuer.

**Exemple d'utilisation : inversion d'une matrice** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  de rang  $n$ . Si l'on note  $e_i$  le  $i$ -ème vecteur de la base canonique (c.a.d. le vecteur avec un 1 en  $i$ -ème ligne et des 0 ailleurs), et  $C_i$  la  $i$ -ème colonne de  $A^{-1}$ , l'égalité  $AA^{-1} = I_n$  est équivalente à  $AC_i = e_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). On a donc à résoudre  $n$  systèmes linéaires, ayant tous la même matrice  $A$  et des seconds membres différents. Plutôt que mettre en oeuvre  $n$  algorithmes de Gauss (ce qui coûterait  $n^4/3$ ), on a intérêt à faire la décomposition  $LU$  de  $A$  (coût :  $n^3/3$ ) puis à résoudre les  $n$  systèmes  $LU C_i = e_i$  (coût :  $n \times n^2$ ), soit un coût total de  $4n^3/3$ .

### 3 Déterminants

#### 3.1 Formes $n$ -linéaires alternées

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $f$  définie de  $E^n$  vers  $K$  (une fonction à image dans  $K$  est appelée une **forme**). Autrement dit,  $f$  associe à  $n$  vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  de  $E$  un scalaire  $f(v_1, \dots, v_n)$ .

**Déf**  $f$  est dite  **$n$ -linéaire** ssi elle est linéaire par rapport à chaque variable, c.a.d.

$$\begin{aligned} f(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_n) &= f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + f(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n) & \forall v_1, \dots, v_n, \forall i \\ f(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n) &= \lambda f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) & \forall v_1, \dots, v_n, \forall \lambda, \forall i \end{aligned}$$

**Déf** Soit  $f$  une forme de  $E^n$  vers  $K$ . On dit que  $f$  est **alternée** ssi  $f(v_1, \dots, v_n) = 0$  dès que les  $v_i$  ne sont pas tous distincts.

**Prop** Les formes  $n$ -linéaires alternées forment un espace vectoriel de dimension 1. Autrement dit, deux formes  $n$ -linéaires alternées sont forcément multiples l'une de l'autre.

#### 3.2 Déterminant d'une matrice carrée

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(K)$ .

**Déf** On appelle **mineur d'indice  $(i, j)$** , notée  $M_{ij}$ , la matrice de  $\mathcal{M}_{n-1}(K)$  obtenue en enlevant la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ème colonne de  $A$ .

**Déf** On appelle **déterminant** l'application qui à toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  associe la valeur définie par récurrence de la façon suivante :

$$\begin{aligned} &\text{- si } n = 1, \det A = a_{11} \\ &\text{- si } n > 1, \det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij} \text{ (développement par rapport à la } j\text{-ème colonne),} \\ &\text{ou encore } \det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij} \text{ (développement par rapport à la } i\text{-ème ligne).} \end{aligned}$$

Pour montrer que toutes ces définitions par développement par rapport à une ligne ou à une colonne quelconque sont équivalentes, on montre tout d'abord qu'on définit ainsi des formes  $n$ -linéaires alternées. Elles sont donc égales entre elles à un facteur multiplicatif près. De plus, elles prennent toutes la même valeur sur la matrice identité  $I_n$ . Donc elles sont égales.

#### 3.3 Quelques propriétés

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(K)$ . On note  $L_k$  ses lignes et  $C_k$  ses colonnes.

- Le fait de remplacer  $L_k$  par  $L_k + \sum_{i \neq k} \alpha_i L_i$ , ou  $C_k$  par  $C_k + \sum_{i \neq k} \alpha_i C_i$  ne change pas la valeur du déterminant.
- Si  $B$  est obtenue en permutant deux lignes ou deux colonnes de  $A$ ,  $\det B = -\det A$ .

- Si  $B$  est obtenue en multipliant une ligne ou une colonne de  $A$  par  $\lambda \in K$ , alors  $\det B = \lambda \det A$ .
- $\det A^t = \det A$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
- En général,  $\det(A + B) \neq \det A + \det B$
- $\det AB = \det A \cdot \det B$
- $A$  est inversible ssi  $\det A \neq 0$ . Dans ce cas,  $\det A^{-1} = 1/\det A$
- Le système linéaire  $AX = b$  a une solution unique ssi  $\det A \neq 0$ .

- Si  $A$  est triangulaire,  $\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$

- Si  $A$  est triangulaire par blocs  $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$  avec chaque bloc  $A_{ii}$

carré, alors  $\det A = \prod_{i=1}^n \det A_{ii}$

- Coût de calcul de  $\det A$  : environ  $n!$  additions et multiplications. C'est un coût énorme. A titre d'exemple,  $20!$  opérations prendraient des dizaines d'années de calcul sur un ordinateur à plusieurs gigaflops (c.a.d. plusieurs milliards d'opérations par seconde). On doit donc faire apparaître un maximum de zéros et/ou de symétries dans le déterminant afin de réduire les calculs.

## 4 Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

On rappelle qu'une application linéaire de  $E$  dans  $E$  est appelée **endomorphisme** de  $E$ . A toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  correspond un endomorphisme  $f$  de  $E$  et réciproquement.

### 4.1 Éléments propres

**Déf**  $\lambda \in K$  est **valeur propre** de  $f$  ssi  $(\exists x \in E, x \neq 0 / f(x) = \lambda x)$

**Déf**  $\lambda \in K$  est **valeur propre** de  $A$  ssi  $(\exists X \in K^n, X \neq 0 / AX = \lambda X)$

**Déf**  $x \in E$  est **vecteur propre** de  $f$  ssi  $(x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in K / f(x) = \lambda x)$

**Déf**  $X \in K^n$  est **vecteur propre** de  $A$  ssi  $(X \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in K / AX = \lambda X)$

**Déf** Soient  $x \in E, x \neq 0$ , et  $\lambda \in K$  tels que  $f(x) = \lambda x$ . On dit que  $x$  est **vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$** .

**Déf** Soient  $X \in K^n, X \neq 0$ , et  $\lambda \in K$  tels que  $AX = \lambda X$ . On dit que  $X$  est **vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$** .

**Déf** L'ensemble des valeurs propres de  $f$  (resp. de  $A$ ) est appelé **spectre** de  $f$  (resp. de  $A$ ).

**Prop** Soit  $D \in \mathcal{M}_n(K)$  une matrice diagonale :  $D = \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn} \end{pmatrix}$ . Chaque  $d_{ii}$  est valeur propre de  $D$  associée au vecteur propre  $e_i$  ( $i$ -ème vecteur de la base canonique).

**Prop** L'ensemble des vecteurs propres associés à une valeur propre  $\lambda$  forme un sous-espace vectoriel, appelé **sous-espace vectoriel propre**, noté  $E_\lambda$ .  $x \in E_\lambda$  ssi  $f(x) = \lambda x$ , c.a.d. ssi  $(f - \lambda Id)(x) = 0$ . Donc  $E_\lambda = \ker(f - \lambda Id)$ .

**Prop** Les sous-espaces vectoriels propres d'un endomorphisme sont en somme directe.

### 4.2 Polynôme caractéristique

$\lambda$  est valeur propre de  $A$  ssi  $\exists X \neq 0 / AX = \lambda X$ , c.a.d. ssi  $\exists X \neq 0 / (A - \lambda Id)X = 0$ , c.a.d. ssi  $\det(A - \lambda Id) = 0$ .

**Déf**  $\det(A - \lambda Id)$  est un polynôme de degré  $n$  en  $\lambda$ , appelé **polynôme caractéristique** de  $A$ , noté  $P_A(\lambda)$ . L'ensemble des valeurs propres de  $A$  est l'ensemble des racines de  $P_A(\lambda)$ . (on voit donc qu'il y a au plus  $n$  valeurs propres).

**Prop** Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. Autrement dit,  $P_\lambda$  est invariant par changement de base.

**Déf** On appelle **ordre de multiplicité** d'une valeur propre son ordre de multiplicité en

tant que racine de  $P_A(\lambda)$ .

**Prop**  $P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(A) \lambda^{n-1} + \dots + \det A$ .

**Prop** La dimension du sev propre  $E_\lambda$  est inférieure ou égale à l'ordre de multiplicité de  $\lambda$ .

### 4.3 Diagonalisation

**Déf** On dit que  $A$  est **diagonalisable** ssi il existe une matrice diagonale  $D$  telle que  $A$  soit semblable à  $D$ . On a donc alors :  $D = P^{-1}AP$ , où  $P$  est une matrice de passage.

**Déf** On dit que  $f$  est **diagonalisable** ssi il existe une base  $\mathcal{B}$  dans laquelle la matrice représentative de  $f$  soit diagonale.

**Prop** Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est diagonalisable
- (ii) Il existe une base formée de vecteurs propres de  $f$
- (iii) La somme des sev propres est égale à  $E$
- (iv) La somme des dimensions des sev propres est égale à  $n$ .

**Déf** On dit qu'un polynôme est **scindé** ssi il peut être factorisé par des monômes, c.a.d. être mis sous une forme  $P(X) = \prod_{i=1}^r (X - x_i)^{m_i}$ . Sur  $\mathbb{C}$ , tout polynôme est scindé.

**Prop** *Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation* :  $f$  est diagonalisable ssi  $P_f$  est scindé ( $P_f(\lambda) = \prod_{i=1}^r (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ , où les  $\lambda_i$  sont distincts) et chaque sev propre  $E_{\lambda_i}$  a pour dimension l'ordre de multiplicité  $m_i$  de la valeur propre  $\lambda_i$ .

**Prop** *Condition suffisante de diagonalisation* : Si  $f$  admet  $n$  valeurs propres distinctes, alors  $f$  est diagonalisable.

**Prop** Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable (et ses sous-espaces propres sont orthogonaux entre eux pour le produit scalaire usuel, ce qui signifie que deux vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux).

## Bibliographie

- [1] J. Lelong-Ferrand et J.-M. Arnaudiès : *Cours de mathématiques - Tome 1*, Dunod 2003.
- [2] J.-M. Monier : *Algèbre et géométrie MP*, Dunod 2004.
- [3] F. Pham et H. Dillinger : *Algèbre linéaire*, Diderot 1996.