TP : Courbes de Bézier

Les fichiers nécessaires à ce TP sont disponibles à l'adresse :
`https://espaces-collaboratifs.grenet.fr/share/page/site/UJFueDDMAP110120/dashboard`
sous la rubrique `Espace documentaire` *dans le dossier* `Documents/Thème_Courbes/TP3`*.*

Sinon, aller à l'adresse `https://espaces-collaboratifs.grenet.fr`*.*
Se loguer, puis dans l'onglet `Sites`*, sélectionner* `Rechercher un site` *et entrer* `MAP110-120`*.*

Attention : les fichiers contenant le programme d'une fonction sont destinés à être utilisés, et en aucun cas à être modifiés.

1 Polynômes de Bernstein

On récupérera le fichier bernstein.sci à l'adresse du lien donné ci-dessus.

On rappelle la définition des polynômes de Bernstein :

$$B_k^n(t) = \mathrm{C}_n^k\,(1-t)^{n-k}\,t^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

La fonction récupérée : function xy = bernstein(n,k,ttrace) calcule pour chaque élément du vecteur ttrace la valeur du polynôme de Bernstein B_k^n.

Exercice 1 *Ecrire un script Scilab nommé exercice1.sce qui permet de tracer sur une même figure les graphes de ces polynômes pour une valeur de n donnée :*

- $B_0^2(t),\ B_1^2(t),\ B_2^2(t),\ t \in [0,1]$,
- $B_0^3(t),\ B_1^3(t),\ B_2^3(t),\ B_3^3(t),\ t \in [0,1]$,
- $B_0^4(t),\ B_1^4(t),\ B_2^4(t),\ B_3^4(t),\ B_4^4(t),\ t \in [0,1]$.

2 Courbes de Bézier

On récupérera le fichier bezier.sce à l'adresse du lien donné ci-dessus.

On souhaite tracer la courbe de Bézier

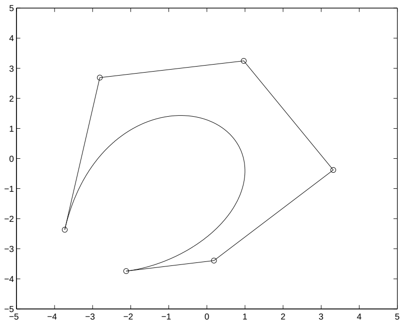
$$m(t) = \sum_{k=0}^{n} m_k\,B_k^n(t), \quad t \in [0,1],$$

associée aux points de contrôle $m_k = (x_k, y_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

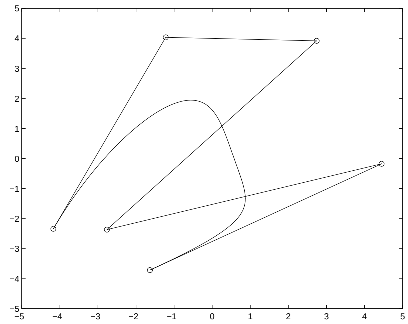
On désigne par npctrl = n+1 le nombre de points de contrôle, et range les coordonnées de ces points de contrôle dans un tableau à deux lignes de la façon suivante :

$MXY(1,1) = x_0$	$MXY(1,2) = x_1$	$MXY(1,3) = x_2$	$\cdots\cdots$	$MXY(1,n) = x_{n-1}$	$MXY(1,n+1) = x_n$
$MXY(2,1) = y_0$	$MXY(2,2) = y_1$	$MXY(2,3) = y_2$	$\cdots\cdots$	$MXY(2,n) = y_{n-1}$	$MXY(2,n+1) = y_n$

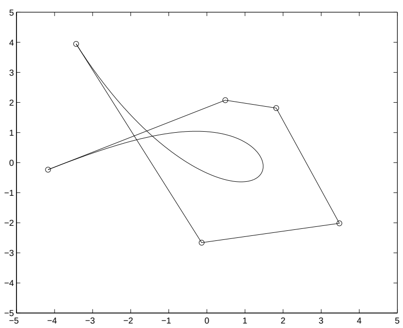
Exercice 2 *Modifier manuellement les données du tableau MXY dans le programme bezier.sce afin de reproduire les courbes de Bézier données ci-dessous.*



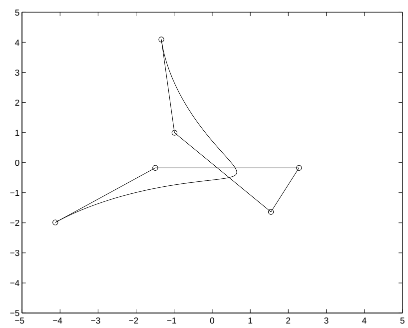
Exemple 1



Exemple 2



Exemple 3



Exemple 4

2.1 Entrée des points de contrôle “à la souris”

On récupérera les fichiers saisirpoints.sci et courbesouris.sce

La fonction saisirpoints.sci permet d’acquérir par des *clics de souris* n points de contrôle dans le rectangle $-10 \leq x \leq 10, -10 \leq y \leq 10$ et trace le polygone de contrôle associé.
Le programme courbesouris.sce récupère les coordonnées de ces points de contrôle et trace la courbe de Bézier associée. Dans ce programme, le nombre de points de contrôle est nommé ndonnees et peut bien sur être modifié.

Exercice 3 *Utiliser ce programme pour tracer des courbes de Bézier*

$$m(t) \,=\, \sum_{k=0}^{n} m_k \, B_k^n(t), \quad t \in \,[0,1],$$

en essayant de reproduire les formes vues en cours, puis d’autres formes.

2.2 Tracer et modifier

On récupérera le fichier courbedesign.sce

Ce programme permet une saisie des points de contrôle à la souris comme défini précédemment et permet ensuite de déplacer successivement ces points de contrôle en réaffichant à chaque fois la courbe de Bézier associée. Précisément, *on clique* sur un point de contrôle afin de le sélectionner, puis on clique sur la nouvelle position souhaitée. Le polygone ainsi que la courbe de Bézier associée, sont ré-évalués et réaffichés.

On met *fin* au programme en cliquant en dehors du rectangle des coordonnées.

Exercice 4 *Expérimenter le programme précédent. Créer une courbe avec une boucle. Créer une courbe de Bézier représentant le chiffre “6” que vous transformerez ensuite en le chiffre “9”.*

3 Les courbes de Bézier quadratiques

Dans cette partie nous n'utiliserons que des courbes de Bézier quadratiques, mais nous effectuerons *des dessins comportant plusieurs courbes de Bézier quadratiques.*

On récupérera le fichier bezierquadratique.sce.

3.1 Le programme de base

Pour $n = 2$, les polynômes de Bernstein s'écrivent

$$B_0^2(t) = (1-t)^2, \quad B_1^2(t) = 2\,t\,(1-t), \quad B_2^2(t) = t^2\,,$$

et chaque courbe de Bézier quadratique est définie par trois points de contrôle :

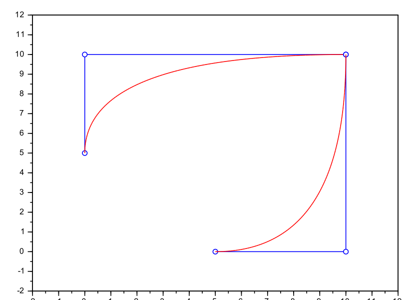
$$m_0 = (x_0, y_0), \quad m_1 = (x_1, y_1), \quad m_2 = (x_2, y_2).$$

Le programme bezierquadratique.sce trace sur une même figure un ensemble de *plusieurs* courbes de Bézier quadratiques. Les points de contrôle de chaque Bézier quadratique sont groupés dans le tableau MXYL (L *pour stockage en ligne*) de sorte que chaque ligne contient les 6 coordonnées des points de contrôle, stockées de la façon suivante :

$$x_0,\ y_0,\ x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2.$$

Si "ncourbes" est le nombre de courbes de Bézier quadratiques, le tableau MXYL est un tableau à "ncourbes" lignes, et le programme bezierquadratique.sce trace sur une même figure l'ensemble de ces "ncourbes" courbes de Bézier quadratiques.

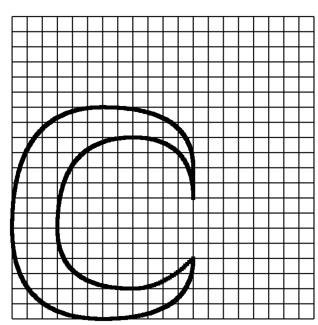
Exercice 5 *Expérimenter le programme bezierquadratique.sce puis modifier deux points de contrôle de sorte à obtenir la figure ci contre.*
On utilisera l'instruction : replot([-1 -1 12 12]).



3.2 Dessiner un caractère

Exercice 6 *Imaginer une méthode pour tracer le caractère suivant en utilisant des courbes de Bézier quadratiques. On remarquera que les séquences de points de contrôle sont :*

- (0,6)(0,14)(6,14)
- (6,14)(12,14)(12,10)
- (12,10)(12,9)(12,8)
- (0,6)(0,0)(6,0)
- (6,0)(12,0)(12,4)
- (3,6)(3,12)(8,12)
- (8,12)(12,12)(12,8)
- (3,6)(3,2)(8,2)
- (8,2)(10,2)(12,4)

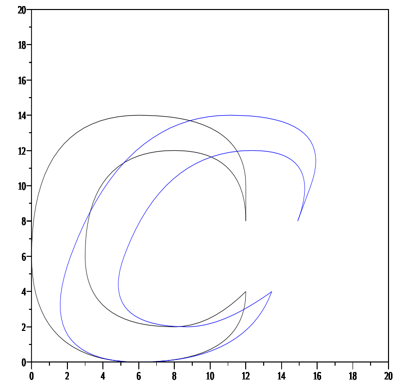


3.3 Transformer le caractère

Exercice 7 *Imaginer une méthode pour tracer le même caractère en "penché " : on pourra par exemple modifier tous les points de contrôle par la transformation suivante :*

$$(x, y) \to (x + y \tan\theta, y)$$

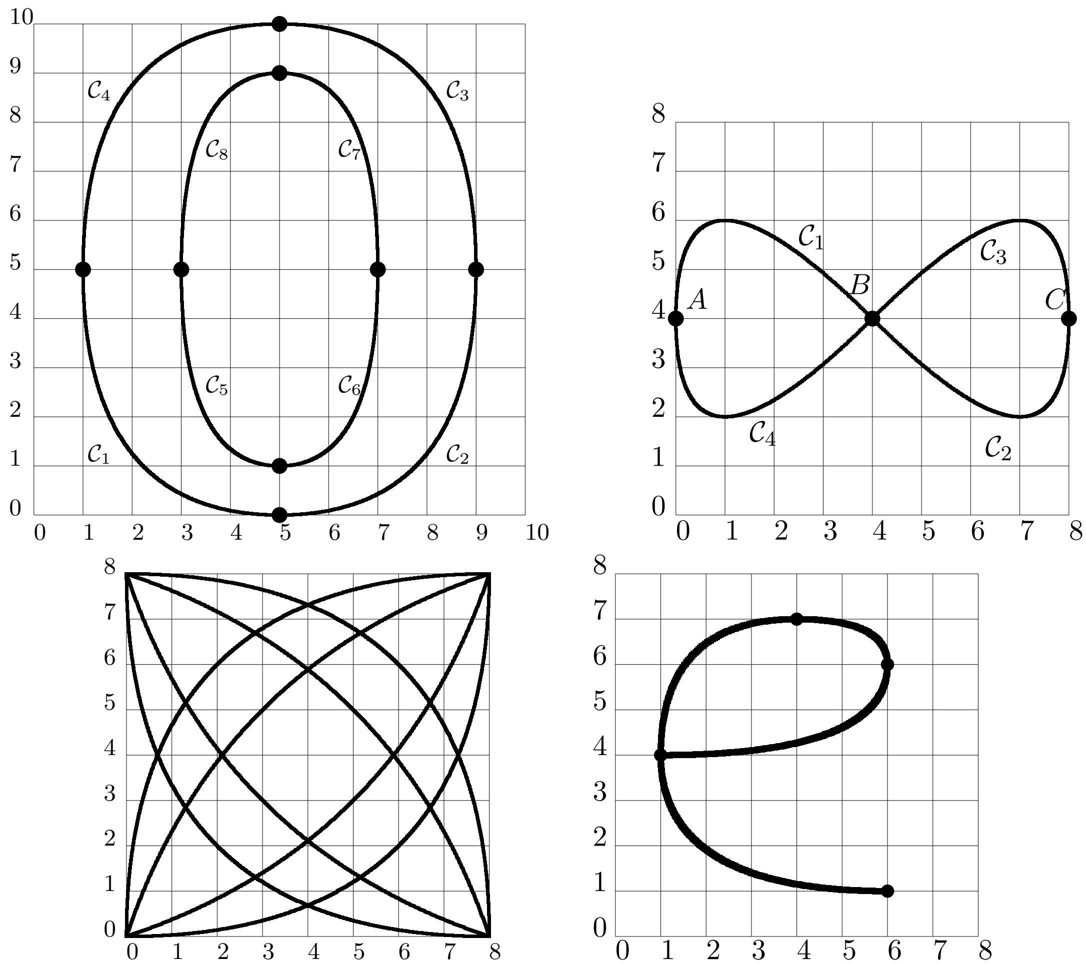
que l'on interprétera.



Transformation du caractère en "*penché* "

3.4 Autres exemples

Exercice 8 *Reproduire les dessins suivants, composés de courbes de Bézier quadratiques.*



3.5 Modéliser un profil

Exercice 9 *On souhaite modéliser le profil suivant à l'aide de courbes de Bézier quadratiques. On partira de l'esquisse de la figure 1, et* **on construira manuellement** *sur une feuille quadrillée un ensemble de courbes de Bézier quadratiques tel que celui de la figure 2. On repèrera ensuite les* *coordonnées des points de contrôle, puis on procédera au tracé du profil en utilisant le programme ci-dessus.*

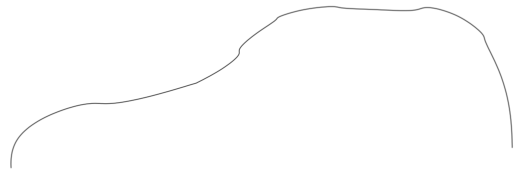


Figure 1 - Esquisse

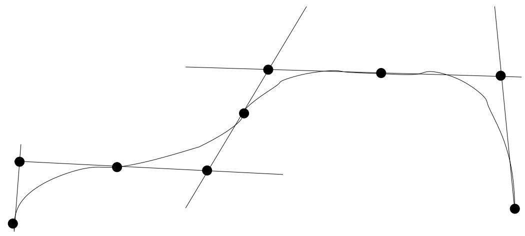
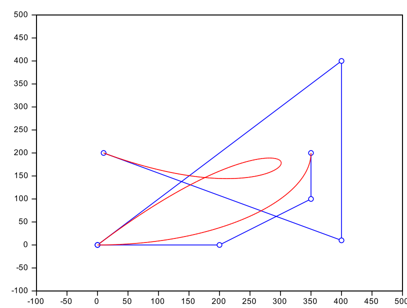


Figure 2 - De l'esquisse aux points de contrôle

4 Les courbes de Bézier cubiques (de degré 3)

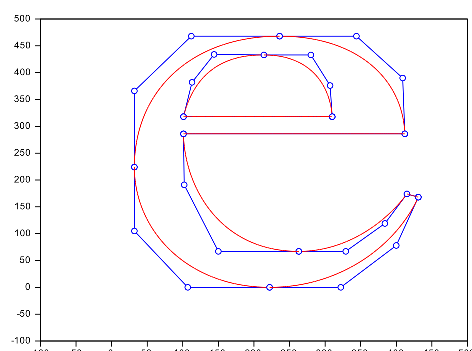
On récupérera le fichier beziercubique.sce



Exercice 10 *Modifier les données de la matrice MXYL dans le programme beziercubique.sce afin de ne plus avoir la boucle ci-contre.*

Exercice 11 *On traitera l'ensemble de données :*

```
MXYL = [
412 286   409 390 344 468   236 468 ;
236 468   112 468   32 366   32 224 ;
32 224   32 105   107 0   222 0 ;
222 0   322 0   400 78   431 168 ;
415 174   384 119   329 67   263 67 ;
263 67   150 67   102 191   101 286 ;
101 318   113 382   144 434   214 433 ;
214 433   280 433   307 376   310 318;
//lignes droites
431 168   431 168 415 174 415 174 ;
101 286   101 286   412 286   412 286 ;
310 318 310 318 101 318   101 318 ;
];
```

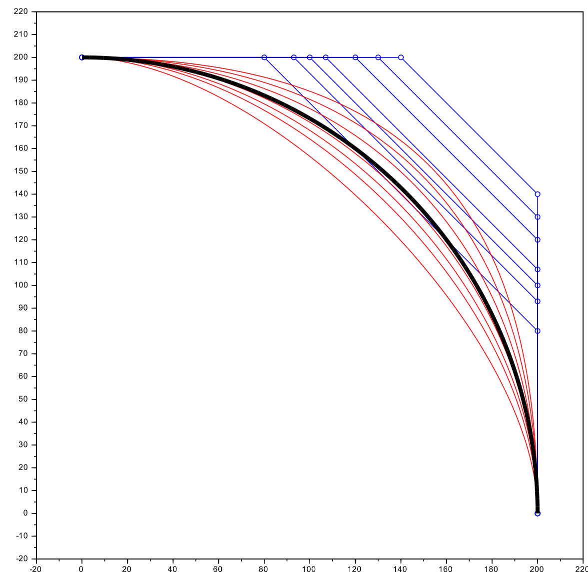


que l'on récupérera dans le fichier caractere.txt

4.1 Adaptation du programme

Appliquer une transformation sur les points de contrôle de façon à tracer le caractère précédent en "*penché*".

4.2 Approximation d'un quart de cercle



Exercice 12 *On tracera un quart de cercle de rayon $r = 200$, par exemple en noir comme sur la figure ci-contre.*
On utilisera ensuite le programme précédent pour tracer la famille des courbes de Bézier cubiques, dépendant du paramètre réel α, et ayant pour points de contrôle :

$m_0 = (200, 0)$,
$m_1 = (200, \alpha)$,
$m_2 = (\alpha, 200)$,
$m_3 = (0, 200)$,

pour des valeurs de α comprises entre 80 et 140.

Un peu de calcul maintenant.... Pour $n = 3$, les polynômes de Bernstein s'écrivent

$$B_0^3(t) = (1-t)^3, \quad B_1^3(t) = 3\,t\,(1-t)^2, \quad B_2^3(t) = 3\,t^2\,(1-t), \quad B_3^3(t) = t^3\,,$$

et la courbe de Bézier associée aux points de contrôle m_0, m_1, m_2, m_3 est

$$m(t) \;=\; \sum_{k=0}^{3} m_k\, B_k^3(t), \quad t \in \,[0,1].$$

Exercice 13 *On considère le cercle unité $\mathcal{C}$ et la courbe de Bézier cubique associée aux points de contrôle $m_0 = (1,0)$, $m_1 = (1,a)$, $m_2 = (a,1)$, $m_3 = (0,1)$, avec $a \in]0,1[$.*
i) Déterminer le point U, intersection du cercle $\mathcal{C}$ avec la bissectrice $y = x$, $x > 0$.
ii Déterminer le paramètre a de sorte que $m(1/2) = U$.
iii) Tracer le cercle de rayon $r = 200$ et son approximation par 4 courbes Bézier cubiques.

4.3 Passage base des monômes - base de Bernstein

Exercice 14 *On donne la courbe paramétrée polynomiale cubique suivante définie pour $t \in [0,1]$:*

$$\begin{array}{l} x(t) = 3\,t - 3\,t^2 + 2\,t^3 \\ y(t) = 3\,t^2 - 3\,t^3 \end{array} \quad = \sum_{i=0}^{3} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} t^i = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}.$$

i) Tracer cette courbe.
ii) Identifier les coefficients a_i et b_i et écrire cette courbe sous la forme suivante

$$m(t) \;=\; \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0^3(t) \\ B_1^3(t) \\ B_2^3(t) \\ B_3^3(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{3} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} B_i^3(t)$$

avec

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

iii) Tracer le polygone de contrôle Bézier de cette courbe.