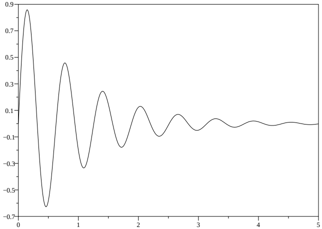
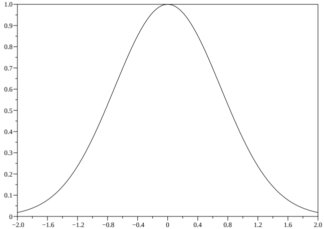
Représentations graphiques
&
Courbes paramétrées

Définition explicite

- Soit f est une fonction continue :
$$f \ : \ [a,b] \subset \mathbb{R} \ \to \ \mathbb{R}$$
- et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative :
$$\mathcal{C} = \{(t,f(t)) \in \mathbb{R}^2, \ t \in [a,b]\}$$
- $\to$ définition **explicite** de la courbe $\mathcal{C}$



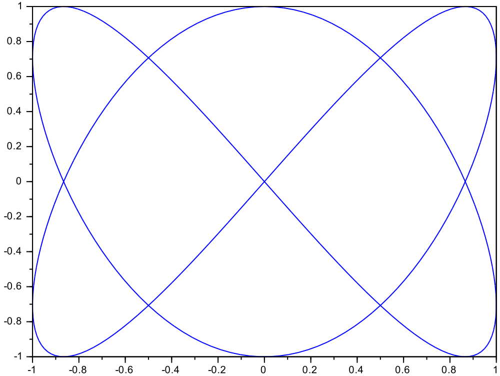
$f(t) = \sin(10 * t) * \exp(-t)$
$t \in [0,5]$



$g(t) = \exp(-t^2)$
$t \in [-2,2]$

Définition explicite... ?

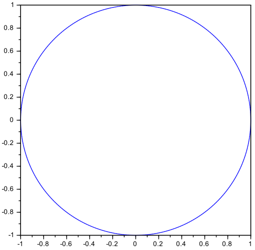
- Remarque : la courbe ci-dessous ne peut pas être le graphe d'une fonction



Courbe de Lissajou

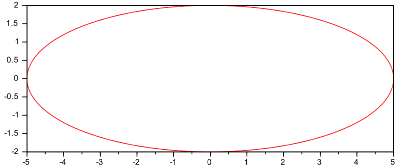
Définition implicite

- Soit f est une fonction continue à 2 variables réelles :
  $f\,:\ \mathbb{R}^2 \ \to\ \mathbb{R} \qquad (x,y)\ \mapsto f(x,y)$
- on considère alors le sous ensemble $\mathcal{C}$ du plan défini par
  $$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = 0\}$$
- $f(x,y) = 0$ est une équation **implicite** de la courbe $\mathcal{C}$



$$x^2 + y^2 - 1 \ =\ 0$$

cercle



$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} - 1 = 0$$

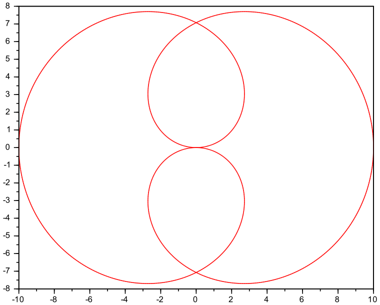
ellipse

Définition implicite

- Autre exemple : l'équation implicite

$$(x^2+y^2)\left(2\,(x^2+y^2)-a^2\right)^2-a^4\,x^2=0\,,$$

définit le Folium de Durer



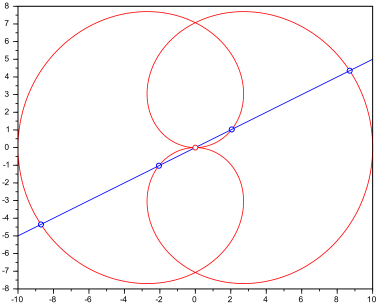
- comment **évaluer** (et donc tracer) cette courbe ?

Définition implicite

- Autre exemple : l'équation implicite

$$(x^2 + y^2)\left(2\,(x^2 + y^2) - a^2\right)^2 - a^4\,x^2 = 0\,,$$

définit le Folium de Durer



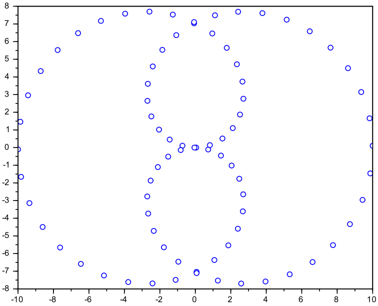
- comment **évaluer** (et donc tracer) cette courbe ?

Définition implicite

- Autre exemple : l'équation implicite

$$(x^2 + y^2)\left(2\,(x^2 + y^2) - a^2\right)^2 - a^4\,x^2 = 0\,,$$

définit le Folium de Durer



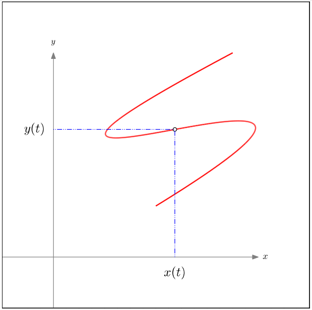
- comment **évaluer** (et donc tracer) cette courbe ?

Représentation paramétrique

- Soient f et g deux fonctions continues de $[a,\, b] \to \mathbb{R}$
  $t \mapsto f(t) \qquad t \mapsto g(t)$
- alors, l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{m(t) = \big(f(t), g(t)\big) \ \in \mathbb{R}^2,\ t \in\ [a,\, b]\}$$

définit une courbe **paramétrée** du plan



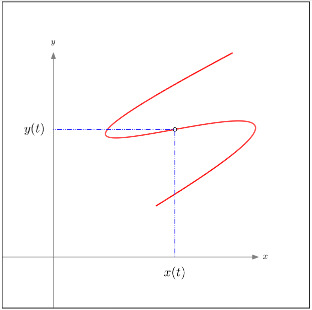
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \qquad t \in I$$

Représentation paramétrique

- Soient f et g deux fonctions continues de $\begin{array}{rcl} [a,\, b] & \to & \mathbb{R} \\ t \mapsto f(t) & & t \mapsto g(t) \end{array}$
- alors, l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{m(t) = \big(f(t), g(t)\big) \in \mathbb{R}^2,\ t \in [a,\, b]\}$$

définit une courbe **paramétrée** du plan

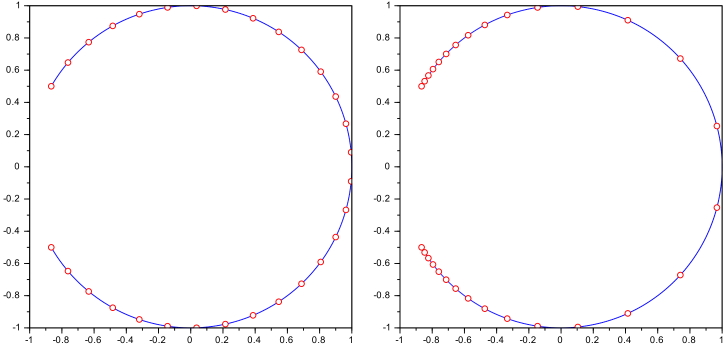


Remarques :

- Tracé naturel et aisé
- non unicité de la paramétrisation
- ... influence de la paramétrisation
- étude qualitative :
  - vecteur dérivé, tangente, cinématique,
  - repère mobile de Serret-Frenet

Représentation paramétrique

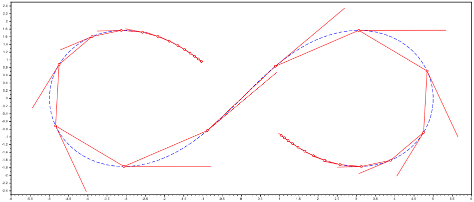
- influence de la paramétrisation



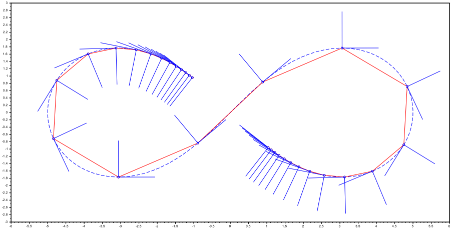
Deux paramétrisations d'un arc de cercle

Représentation paramétrique

- vecteur dérivé, tangente, cinématique...



- ... et repère de Serret-Frenet



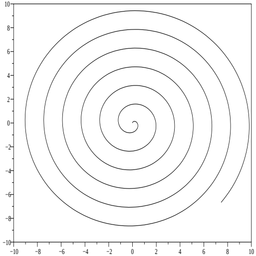
Représentation en coordonnées polaires

- Soit ρ une fonction continue :

$$\rho : \ [a, b] \ \rightarrow \ \mathbb{R}^+ \qquad \theta \ \mapsto \ \rho(\theta)$$

- l'ensemble des points de coordonnées polaires $\big(r = \rho(\theta), \theta\big)$ définit une courbe en **coordonnées polaires** :

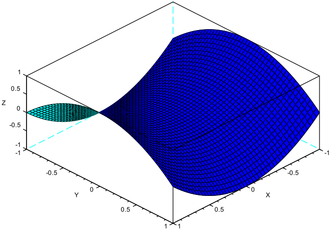
$$\mathcal{C} = \{\big(r, \theta\big) \ , \quad r = \rho(\theta) \ , \ \theta \in \ [a, b]\}$$



spirale : $\theta \ \mapsto \ \rho(\theta) = \theta$

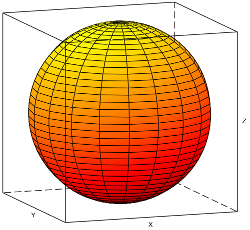
Surfaces en 3D

- définition explicite : graphe d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



- définition implicite : zéros d'une fonction de 3 variables

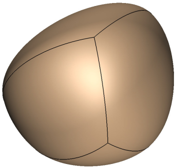
$$f(x, z, y) = 0 \ \to \text{sphère} : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

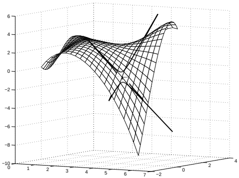


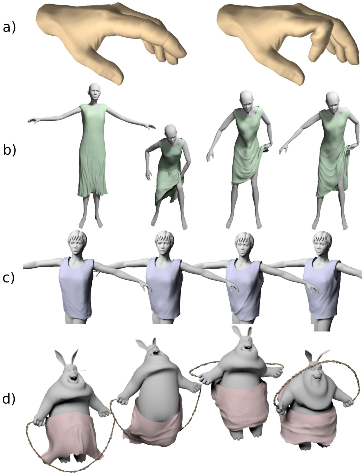
Surfaces en 3D

- définition paramétrique : image d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$(u,v) \mapsto \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$





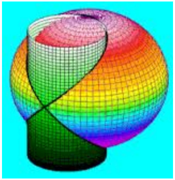


http ://www-ljk.imag.fr/membres/Stefanie.Hahmann/

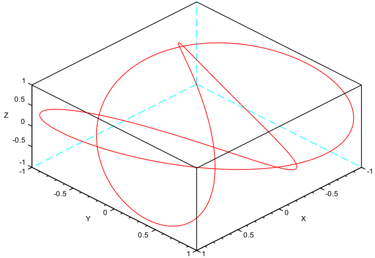
Courbes 3D

- définition implicite : intersection de 2 surfaces implicites

$$f(x,y,z) = 0 \;\text{ et }\; g(x,y,z) = 0 \;\rightarrow \text{fenêtre de Viviani}$$



- définition paramétrique : $\begin{array}{rcl}[a,b] & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \big(x(t), y(t), z(t)\big)\end{array}$



$$x = sin(2t)$$
$$y = sin(3t)$$
$$z = cos(3t)$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

Synthèse

- Courbes en 2D
  - définition explicite : graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  - définition implicite : zéros d'une fonction de 2 variables
    $f(x, y) = 0$
  - définition paramétrique : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$
  - autres : représentation polaire, itérative (type fractale),...
- Surfaces en 3D
  - définition explicite : graphe d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
  - définition implicite : zéros d'une fonction de 3 variables
    $f(x, z, y) = 0 \;\to$ sphère : $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$
  - définition paramétrique : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
    $(u, v) \mapsto \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$
- Courbes en 3D
  - définition implicite : intersection de 2 surfaces implicites
    $f(x, y, z) = 0$ et $g(x, y, z) = 0 \;\to$ fenêtre de Viviani
  - définition paramétrique : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
    $t \mapsto \big(x(t), y(t), z(t)\big)$