Université Joseph Fourier - Grenoble I **Année 2017-2018**

MAP350 – L3 MI

DS du 10 octobre 2017

Exercice 1 :

On considère les 5 points distincts

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5\,,$$

ainsi qu'une fonction f suffisamment dérivable qui vérifie :

$$\begin{cases} f(x_0) &=& 1, \\ f(x_1) &=& 2, \\ f(x_2) &=& 3, \\ f(x_3) &=& 4, \\ f(x_4) &=& 5. \end{cases}$$

1. Déterminer <u>sans calcul</u> le polynôme d'interpolation p de f aux points d'abscisses x_i pour $i = 0, \dots, 4$. Justifier brièvement votre réponse.
2. Calculer les différences divisées
$$f[x_0],\ f[x_0, x_1], \dots,\ f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4].$$
3. Retrouver le polynôme d'interpolation p de la fonction f aux points d'abscisses $x_0, \dots, x_4$ à l'aide des formules d'interpolation dans la base de Newton.
4. On rajoute la donnée d'interpolation : $f(x_5) = 126$. Compléter le tableau des différences divisées et déterminer le polynôme d'interpolation q de f aux points d'abscisses x_i pour $i = 0, \dots, 5$. *On écrira ce polynôme dans la base de Newton.*

Exercice 2 :

Erreur dans l'interpolation d'Hermite.

Remarque : on peut admettre le résultat d'une question et passer à la suivante.

Soit $a < b$ et $f \in C^4([a, b])$. On considère le polynôme d'interpolation de Hermite p de f aux points a et b, c'est à dire le polynôme de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant :

$$p(a) = f(a)\,,\ p(b) = f(b)\,,\ p'(a) = f'(a)\,,\ p'(b) = f'(b)\,.$$

Pour x fixé dans $]a, b[$, on considère la fonction ϕ définie sur $[a, b]$ par :

$$\phi(t) = f(t) - p(t) - \frac{(t-a)^2(t-b)^2}{(x-a)^2(x-b)^2}\big(f(x) - p(x)\big)\,.$$

1. Monter que ϕ s'annule en a, b, et x et en déduire que ϕ' s'annule en deux points distincts de $]a, b[$.
2. Montrer que $\phi'(a) = \phi'(b) = 0$.
3. Déduire des questions précédentes qu'il existe $\zeta \in [a, b]$ tel que $\phi^{(4)}(\zeta) = 0$.
4. Montrer qu'alors on a :
$$f(x) - p(x) = \frac{(x-a)^2(x-b)^2}{24}\, f^{(4)}(\zeta)\,.$$
5. En déduire que pour tout $x \in [a, b]$ on a :
$$|f(x) - p(x)| \le \frac{(b-a)^4}{24} \max_{a \le \zeta \le b} |f^{(4)}(\zeta)|\,.$$