Université Grenoble Alpes **Année 2016-2017**

MAP350 – L3 MI

Examen du 07 décembre 2016

Exercice 1 :

On demande ici d'analyser le programme Scilab donné ci-contre et dont l'éxécution conduit à l'affichage donné ci-dessous dans la console Scilab, mais dont l'affichage graphique est manquant.

```
xi = [0 2 3 4  6]’;
yi = [1 3 6 13 61]’;
nbpts = length(xi)
plot (xi,yi,’ok’,’Markersize’,10,’linewidth’,2)
x = linspace(-1,7,100);
a = 5;
wi = [2*a,1,1,1,a];
D = diag(wi);

A1 = ones(nbpts,3);
A1(:,2) = xi;
A1(:,3) = xi.^2;
X1 = inv(A1’ * D * A1) * (A1’ * D * yi);
disp(X1)
y = X1(1) + X1(2) * x + X1(3) * x.^2;
plot(x,y,’b:’,’linewidth’,2)
e1 = yi - ( X1(1) + X1(2) * xi + X1(3) * xi.^2 );
E1 = (e1’ * D * e1) / nbpts;
disp(E1)

A2 = ones(nbpts,2);
A2(:,2) = xi.^4;
X2 = inv(A2’ * D * A2) * (A2’ * D * yi)
disp(X2)
y = X2(1) + X2(2) * x.^4;
plot(x,y,’r:’,’linewidth’,2)
e2 = yi - ( X2(1) + X2(2) * xi.^4 )
E2 = (e2’ * D * e2) / nbpts;
disp(E2)

A3 = ones(nbpts,2);
A3(:,1) = xi;
A3(:,2) = exp(xi);
X3 = inv(A3’ * D * A3) * (A3’ * D * yi)
disp(X3)
y = X3(1) * x + X3(2) * exp(x);
plot(x,y,’g:’,’linewidth’,2)
e3 = yi - ( X3(1) * xi + X3(2) * exp(xi) )
E3 = (e3’ * D * e3) / nbpts;
disp(E3)
```

1. Ce programme semble comparer plusieurs modèles. Préciser chacun de ces modèles.
2. Quelle méthode précise (en lien avec les données) est utilisée pour déterminer les paramètres de chacun des modèles.
3. Ecrire précisément les quantités qui sont minimisées.
4. L'un des modèles vous semble-t-il mieux adapté aux données ? Justifier votre réponse.
5. On suppose maintenant que le paramètre a (ligne 6 du programme) vaut 50. Donner une bonne approximation de la droite de régression linéaire associée à ces (nouvelles) données.

```
-->exec(’C:\Users\...\exo1.sce’, -1)

    1.1606087
  - 7.0440503
    2.8269235

    9.9275965

    1.2025067
    0.0461517

    0.5310139

    1.2622511
    0.1324743

    1.6993911
```

Exercice 2 :

On note Ω_2 l'ensemble des fonctions réelles définies sur $[a,b]$, de classe C^2, et interpolant les données (x_i, y_i) pour $i = 1,2,3$ définies par

$$\begin{aligned} a = x_1 = -1, \qquad & x_2 = 0, \qquad & x_3 = 1 = b, \\ y_1 = 0, \qquad & y_2 = 1, \qquad & y_3 = -2. \end{aligned}$$

Déterminer

$$e_2 = \min_{h \in \Omega_2} \left(\int_a^b h''(x)^2 \, \mathrm{d}x \right)$$

Exercice 3 :

On considère ici le problème d'interpolation spline cubique C^2 où la condition de nullité de la dérivée seconde aux extrémités (condition des splines naturelles) est transférée sur le deuxième nœud et sur l'avant dernier. On se place dans le cas uniforme.

Soit la famille suivante de nœuds équidistants

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

avec $n \geq 4$, $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 1, \ldots, n-1$, et on considère l'ensemble $F \subset \Pi_2^3(x_1, ..., x_n)$ des fonctions de classe C^2 sur l'intervalle $[a, b]$ dont la restriction à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, et dont la dérivée seconde est nulle aux nœuds x_2 et x_{n-1}. On rappelle que $1, x, x^2, x^3, \{(x - x_i)_+^3\}_{i=2,\ldots,n-1}$ est une base de $\Pi_2^3 = \Pi_2^3(x_1, ..., x_n)$.

Structure vectorielle.

1. Donner la dimension de $\Pi_2^3 = \Pi_2^3(x_1, ..., x_n)$.
2. Vérifier que F est un espace vectoriel.

Dimension.

Soit $s(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \sum_{i=2}^{n-1} b_i (x - x_i)_+^3$ un élément Π_2^3. On note s_i la restriction de s à l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

3. Donner l'expression de chacun des polynômes $s_1(x)$ et $s_{n-1}(x)$.
   En déduire l'expression des dérivées secondes $s_1''(x)$ et $s_{n-1}''(x)$.
4. En déduire les conditions sur les coefficients a_k et b_i pour que s appartiennent à l'ensemble F.
5. On souhaite ici déterminer la dimension de F. Pour cela :
   a) introduire une application linéaire φ de $\mathbb{R}^{n+2}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$,
   b) écrire précisément la matrice de cette application linéaire,
   c) conclure sur la dimension de F.

Interpolation.

On donne maintenant n valeurs réelles $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

6. Modifier la méthode développée dans le cours pour l'interpolation spline cubique C^2 dans le cas des splines naturelles, afin de déterminer l'unique élément s de F vérifiant

$$s(x_i) = y_i, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

   a) Préciser les inconnues du système.
   b) Ecrire sous forme matricielle le système linéaire (en justifiant précisément sa construction) permettant de déterminer ces inconnues.

Exemple.

On considère le cas $n = 4$ avec les données suivantes

$$\begin{array}{llll} x_1 = -3, & x_2 = -1, & x_3 = 1, & x_4 = 3, \\ y_1 = -1, & y_2 = -1, & y_3 = 1, & y_4 = 1. \end{array}$$

7. Déterminer l'unique élément s de l'espace F interpolant ces données (x_i, y_i).