Université Grenoble Alpes **Année 2016-2017**

MAP350 – L3 MI

DS du 04 octobre 2016

Exercice 1 :

Considérons $n+1$ points distincts $x_0, x_1, \ldots, x_n$ d'un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$ et soit $f \in C^n([a, b])$. Montrer qu'il existe ξ dans le plus petit intervalle contenant l'ensemble des points x_i tel que

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

où $f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \delta[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ est la différence divisée d'ordre n associée aux données d'interpolation $(x_i, y_i = f(x_i))$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$.

Indication. *On s'inspirera du raisonnement développé pour la détermination de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange (section 4) du chapitre 2 sur l'interpolation.*

Exercice 2 : *Interpolation de Hermite d'ordre 2 en deux points*

1. *Interpolation de Hermite d'ordre* 2 *sur* $[0, 1]$
   Montrer qu'il existe un unique polynôme $q(x)$ de degré 5 tel que

$$\begin{array}{lll} q(0) = y_0 & q'(0) = y'_0 & q''(0) = y''_0 \\ q(1) = y_1 & q'(1) = y'_1 & q''(1) = y''_1 \end{array}$$

   où y_0, y'_0, y''_0 et y_1, y'_1, y''_1 sont des nombres réels fixés.

2. *Interpolation de Hermite d'ordre* 2 *sur* $[a, b]$ $(a < b)$
   En déduire qu'il existe un unique polynôme $p(x)$ de degré 5 tel que

$$\begin{array}{lll} p(a) = y_a & p'(a) = y'_a & p''(a) = y''_a \\ p(b) = y_b & p'(b) = y'_b & p''(b) = y''_b \end{array}$$

   où y_a, y'_a, y''_a et y_b, y'_b, y''_b sont des nombres réels fixés.

3. *Base quintique de Hermite sur* $[0, 1]$
   On considère les polynômes de degré 5 suivants.

$$\begin{array}{ll} Q_0(x) = -6\,x^5 + 15\,x^4 - 10\,x^3 + 1 & Q_1(x) = -3\,x^5 + 8\,x^4 - 6\,x^3 + x \\ Q_2(x) = \dfrac{1}{2}(-x^5 + 3\,x^4 - 3\,x^3 + x^2) & Q_3(x) = \dfrac{1}{2}(x^5 - 2\,x^4 + x^3) \\ Q_4(x) = -3\,x^5 + 7\,x^4 - 4\,x^3 & Q_5(x) = 6\,x^5 - 15\,x^4 + 10\,x^3 \end{array}$$

   Déterminer la matrice ci-dessous représentant les valeurs des polynômes $Q_i(x)$ et de leurs dérivées premières et secondes en 0 et en 1.

$$\begin{bmatrix} Q_0(0) & Q'_0(0) & Q''_0(0) & Q''_0(1) & Q'_0(1) & Q_0(1) \\ Q_1(0) & Q'_1(0) & Q''_1(0) & Q''_1(1) & Q'_1(1) & Q_1(1) \\ Q_2(0) & Q'_2(0) & Q''_2(0) & Q''_2(1) & Q'_2(1) & Q_2(1) \\ Q_3(0) & Q'_3(0) & Q''_3(0) & Q''_3(1) & Q'_3(1) & Q_3(1) \\ Q_4(0) & Q'_4(0) & Q''_4(0) & Q''_4(1) & Q'_4(1) & Q_4(1) \\ Q_5(0) & Q'_5(0) & Q''_5(0) & Q''_5(1) & Q'_5(1) & Q_5(1) \end{bmatrix}$$

4. Donner la solution $q(x)$ au problème d'interpolation polynomiale de Hermite d'ordre deux sur l'intervalle $[0, 1]$, en fonction des polynômes Q_i.

5. En déduire la solution $p(x)$ au problème d'interpolation polynomiale de Hermite d'ordre deux sur l'intervalle $[a, b]$, en fonction des polynômes Q_i.

Réponse question 5 :

$$p(x) = \Big(Q_0(t), Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), Q_4(t), Q_5(t)\Big) \begin{pmatrix} y_a \\ (b-a)\, y'_a \\ (b-a)^2\, y''_a \\ (b-a)^2\, y''_b \\ (b-a)\, y'_b \\ y_b \end{pmatrix} \quad \text{avec} \;\; t = \frac{x-a}{b-a}$$