Université Joseph Fourier - Grenoble **Année 2015-2016**
MAP350 – L3 MI

Examen du 09 décembre 2015

Exercice 1 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On note P_σ le polynôme d'interpolation de f sur l'ensemble $\sigma = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \subset I$, où les points t_i sont deux à deux distincts. Montrer que

$$P_{\sigma+a+b}(x) = \frac{1}{a-b} \begin{vmatrix} P_{\sigma+a}(x) & x-a \\ P_{\sigma+b}(x) & x-b \end{vmatrix} \tag{1}$$

où a et b sont deux points supplémentaires distincts de I et où le signe "+" désigne l'union, par exemple $\sigma + a = \sigma \cup \{a\}$.

Exercice 2 :

A toutes fins utiles on donne la matrice suivante dépendant d'un paramètre $w > 0$.

$$Q = \frac{1}{10\,(17\,w+18)} \begin{pmatrix} 22\,w+108 & -27\,w+42 & 5\,w-30 \\ -27\,w+42 & 37\,w+98 & -10\,w-40 \\ 5\,w-30 & -10\,w-40 & 5\,w+20 \end{pmatrix}.$$

Un phénomène physique relie deux quantités x et y selon une loi polynomiale de degré deux :

$$y = a + b\,x + c\,x^2\,.$$

où a, b et c sont trois paramètres inconnus. Des mesures fournissent un ensemble de données (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 5$:

$$(-1,3),\ (0,2),\ (1,0),\ (2,2),\ (3,3)\,.$$

On propose donc de développer une méthode d'approximation aux moindres carrés permettant d'estimer les paramètres a, b et c de ce modèle. Cependant, pour des raisons théoriques, la mesure $(x_3, y_3) = (1,0)$ est considérée comme "*certaine*", de sorte que la solution aux moindres carrés $y = \hat{a} + \hat{b}\,x + \hat{c}\,x^2$ doit nécessairement satisfaire cette contrainte.

Première approche. On propose d'affecter un poids $w_i = 1$ à chacune des mesures (x_i, y_i), sauf à la mesure $(x_3, y_3) = (1,0)$ à laquelle on attribue un poids $w_3 = w > 0$.

1. Modéliser cette approche, notamment en introduisant une matrice carrée Ω représentant les poids. En déduire le système linéaire 3×3 permettant d'identifier les paramètres a, b, c de ce problème d'approximation aux moindres carrés pondérés.
2. Résoudre ce système 3×3. On notera $(\hat{a}_w,\ \hat{b}_w,\ \hat{c}_w)$ la solution de ce système.
3. Préciser la quantité que minimise cette solution.
4. Déterminer la solution $(\hat{a},\ \hat{b},\ \hat{c})$ du problème posé.

Deuxième approche. On propose de modifier le modèle initial $y = a + b\,x + c\,x^2$ afin de le contraindre à satisfaire directement la condition (x_3, y_3), c'est-à-dire $y_3 = a + b\,x_3 + c\,x_3^2$. Pour celà, on fera par exemple la différence de ces deux équations.

5. Montrer qu'ainsi le problème peut se modéliser sous la forme

$$y = (x-1)\,(\alpha + \beta\,x)$$

   et donner les relations entre a, b, c et α, β.
6. Ecrire le système linéaire 2×2 vérifié par les inconnues α et β, solutions aux moindres carrés de ce problème d'approximation, pour les mesures (x_i, y_i), $i = 1, 2, 4, 5$.
7. Calculer la solution $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ de ce système et retrouver la solution $(\hat{a},\ \hat{b},\ \hat{c})$ obtenue précédemment.

Exercice 3 :

Déterminer une approximation de $\sqrt{19}$ (sous forme d'une fraction irréductible) à l'aide de l'interpolation de Lagrange basée sur les points

$$x_0 = 9,\ x_1 = 16,\ x_2 = 25.$$

Donner la précision obtenue

Exercice 4 : — *Spline cubique C^2 avec condition "not a knot"*

On considère ici le problème d'interpolation spline cubique C^2 où la condition de nullité de la dérivée seconde aux extrémités (condition des splines naturelles) est remplacée par la condition *"not a knot"* qui consiste à imposer un raccord de classe C^3 sur le deuxième nœud et sur l'avant dernier. On se place dans le cas uniforme.

Soit la famille suivante de nœuds équidistants

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

avec $n \geq 4$, $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 1, \ldots, n-1$, et on considère l'ensemble $E \subset \Pi_2^3(x_1, ..., x_n)$ des fonctions de classe C^2 sur l'intervalle $[a, b]$ dont la restriction à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, et de classe C^3 aux nœuds x_2 et x_{n-1}. On rappelle que $1, x, x^2, x^3, \{(x - x_i)_+^3\}_{i=2,\ldots,n-1}$ est une base de $\Pi_2^3 = \Pi_2^3(x_1, ..., x_n)$.

1. Donner la dimension de $\Pi_2^3 = \Pi_2^3(x_1, ..., x_n)$.
2. Vérifier que E est un espace vectoriel.
3. Soit $s(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \sum_{i=2}^{n-1} b_i (x - x_i)_+^3$ un élément Π_2^3. On note s_i la restriction de s à l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Donner l'expression de chacun des polynômes $s_1(x), s_2(x), s_{n-2}(x), s_{n-1}(x)$, ainsi que l'expression des dérivées troisième $s_1'''(x), s_2'''(x), s_{n-2}'''(x), s_{n-1}'''(x)$.
4. En déduire les conditions sur les coefficients a_k et b_i pour que s appartiennent à l'ensemble E.
5. Déterminer la dimension de E. On introduira pour cela une application linéaire φ de $\mathbb{R}^{n+2}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Résultat intermédiaire. Soit p le polynôme d'interpolation cubique de Hermite associé aux données $(\alpha, y_\alpha, y'_\alpha)$ et $(\beta, y_\beta, y'_\beta)$ et posons $h = \beta - \alpha$. *On notera que la dérivée troisième de p est un polynôme constant.*

6. Déterminer cette dérivée troisième de p uniquement en fonction des données d'interpolation $\alpha, y_\alpha, y'_\alpha$ et β, y_β, y'_β.
   Indication : comme dans le cours, on écrira le polynôme d'interpolation de Hermite p sous la forme d'un dévelopement de Taylor en α, ainsi que sa dérivée :
   $$p(x) = y_\alpha + (x-\alpha)\, y'_\alpha + \frac{(x-\alpha)^2}{2}\, p''(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^3}{6}\, p'''(\alpha),$$
   $$p'(x) = y'_\alpha + (x-\alpha)\, p''(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2}\, p'''(\alpha),$$
   et on évaluera ces deux polynômes en $x = \beta$.

Construction. On donne maintenant n valeurs réelles $y_1, y_2, ..., y_n$.

7. Modifier la méthode développée dans le cours pour l'interpolation spline cubique C^2 dans le cas des splines naturelles, afin de déterminer un élément s de E vérifiant
   $$s(x_i) = y_i, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$
   On remplacera donc la condition de nullité de la dérivée seconde aux extrémités par la condition de raccord C^3 en x_2 et x_{n-1}. On précisera les inconnues et on écrira le système linéaire permettant de déterminer ces inconnues.