Université Joseph Fourier - Grenoble **Année 2014-2015**
MAP350 – L3 MI

Examen du 08 décembre 2014

Exercice 1 : *Erreur dans l'interpolation de Lagrange.*

Avec quelle précision peut-on calculer sin(1) à l'aide de l'interpolation de Lagrange basée sur les points : $x_0 = 0, x_1 = \pi/6, x_2 = \pi/4, x_3 = \pi/3, x_4 = \pi/2$?

Exercice 2 : *Erreur dans l'interpolation d'Hermite.*

Remarque : on peut admettre le résultat d'une question et passer à la suivante.

Soit $a < b$ et $f \in C^4([a,b])$. On considère le polynôme d'interpolation de Hermite p de f aux points a et b, c'est à dire le polynôme de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant :

$$p(a) = f(a)\,,\ p(b) = f(b)\,,\ p'(a) = f'(a)\,,\ p'(b) = f'(b)\,.$$

Pour x fixé dans $]a,b[$, on considère la fonction ϕ définie sur $[a,b]$ par :

$$\phi(t) = f(t) - p(t) - \frac{(t-a)^2(t-b)^2}{(x-a)^2(x-b)^2}\,\big(f(x) - p(x)\big)\,.$$

1. Monter que ϕ s'annule en a, b, et x et en déduire que ϕ' s'annule en deux points distincts de $]a,b[$.
2. Montrer que $\phi'(a) = \phi'(b) = 0$.
3. Déduire des questions précédentes qu'il existe $\zeta \in [a,b]$ tel que $\phi^{(4)}(\zeta) = 0$.
4. Montrer qu'alors on a :
$$f(x) - p(x) = \frac{(x-a)^2(x-b)^2}{24}\, f^{(4)}(\zeta)\,.$$
5. En déduire que pour tout $x \in [a,b]$ on a :
$$|f(x) - p(x)| \le \frac{(b-a)^4}{24} \max_{a \le \zeta \le b} |f^{(4)}(\zeta)|\,.$$

Exercice 3 : *Erreur résiduelle.*

On demande ici d'analyser le programme Scilab donné ci-dessous à gauche et dont l'éxécution conduit à un affichage dans la console Scilab qui est donné ci-dessous à droite, mais dont l'affichage graphique est manquant.

1. Ce programme semble comparer 2 modèles. Préciser chacun de ces modèles.
2. Ecrire précisément les quantités qui sont minimisées.
3. L'un des modèles vous semble-t-il mieux adapté aux données ? Justifier votre réponse.
4. Reproduire l'affichage graphique manquant.

```
clf
xi = [0 3 4 6]';
yi = [1 2 4 5]';
nbpts = length(xi);
plot (xi,yi,'og','Markersize',10)
x = linspace(-1,7,100);
A = ones(nbpts,2);

A1 = A;
A1(:,2) = xi;
X1 = (A1'*A1)^(-1)*(A1'*yi);
disp(X1)
y = X1(1) + X1(2)*x;
plot(x,y,'b')
E1 = (sum((yi - (X1(1) + X1(2)*xi)).^2)) / nbpts;
disp(E1)

A2 = A;
A2(:,2) = xi.^2;
X2 = (A2'*A2)^(-1)*(A2'*yi);
disp(X2)
y = X2(1) + X2(2)*x.^2;
plot(x,y,'r')
E2 = (sum((yi - (X2(1) + X2(2)*xi.^2)).^2)) / nbpts;
disp(E2)
```

L'éxecution du programme ci-contre (à gauche) conduit à l'affichage suivant dans la console Scilab :

```
-->exec('C:\Users\....\exo3.sce', -1)

    0.7466667
    0.6933333

    0.2466667

    1.2856635
    0.1124155

    0.2797937
```

Exercice 4 : *Spleen...*

On considère ici le problème d'interpolation spline cubique C^2 où la condition de nullité de la dérivée seconde aux extrémités (condition des splines naturelles) est remplacée par une contrainte sur la dérivée première aux extrémités.

Soit la famille suivante de noeuds équidistants

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

avec $n \geq 2$, $x_{i+1} - x_i = h,\ i = 1, \ldots, n-1$, et on considère l'ensemble $E \subset \Pi_2^3(x_1, ..., x_n)$ des fonctions de classe C^2 sur l'intervalle $[a, b]$ dont la restriction à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, et dont la dérivée est nulle aux deux extrémités a et b. On rappelle que $1, x, x^2, x^3, \{(x - x_i)_+^3\}_{i=2,\ldots,n-1}$ est une base de $\Pi_2^3 = \Pi_2^3(x_1, ..., x_n)$.

1. Vérifier que E est un espace vectoriel.
2. Déterminer précisément la dimension de E. On introduira pour cela une application linéaire Φ de Π_2^3 à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

On donne maintenant n valeurs réelles $y_1, y_2, ..., y_n$ ainsi que deux autres réels y'_a et y'_b.

3. Modifier la méthode développée dans le cours pour l'interpolation spline cubique C^2 (cas des splines naturelles) afin de déterminer (si cela est possible) un élément s de Π_2^3 vérifiant

$$s'(a) = y'_a\,, \qquad s(x_i) = y_i,\ i = 1, ..., n\,, \qquad s'(b) = y'_b\,.$$

   On précisera les inconnues et on écrira le système linéaire permettant de déterminer ces inconnues. Discuter de l'existence et l'unicité des solutions.

Exercice 5 : *Pesanteur...*

Plusieurs étudiants effectuent dans des conditions strictement équivalentes chacun une mesure (x_i, y_i) d'un phénomène physique pouvant être représentée par une loi linéaire $y = a\,x + b$. Les mesures sont les suivantes : $(1, 1)$ pour 3 étudiants, $(7, 2)$ pour 1 étudiant, $(11, 5)$ pour 1 étudiant, et $(14, 2)$ pour 2 étudiants. Proposer une méthode permettant d'identifier les paramètres du modèle. En particulier, donner la quantité à minimiser et écrire un système linéaire 2×2 permettant de calculer ces paramètres (*on ne demande pas de résoudre ce système*). Laura qui a effectué la mesure $(7, 2)$ affirme avec gravité que sa mesure est exacte. Qu'en pensez-vous ?