Université Joseph Fourier - Grenoble I **Année 2014-2015**

MAP350 – L3 MI

DS du 24 octobre 2014

Exercice 1 :

On considère les 5 points distincts

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5\,,$$

ainsi qu'une fonction f suffisamment dérivable qui vérifie :

$$\begin{cases} f(x_0) &=& 1, \\ f(x_1) &=& 2, \\ f(x_2) &=& 3, \\ f(x_3) &=& 4, \\ f(x_4) &=& 5. \end{cases}$$

1. Déterminer <u>sans calcul</u> le polynôme d'interpolation p de f aux points d'abscisses x_i pour $i = 0, ..., 4$. Justifier brièvement votre réponse.
2. Calculer les différences divisées
$$\delta[x_0; f],\ \delta[x_0, x_1; f],\ ...,\ \delta[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4; f].$$
3. Retrouver le polynôme d'interpolation p de la fonction f aux points d'abscisses x_i pour $i = 0, ..., 4$.
4. On rajoute la donnée d'interpolation : $f(x_5) = 126$.
Compléter le tableau des différences divisées et déterminer le polynôme d'interpolation q de f aux points d'abscisses x_i pour $i = 0, ..., 5$. *On écrira ce polynôme dans la base de Newton.*

Exercice 2 :

Soient y_0, y_1' et y_2 trois nombres réels fixés. On cherche à déterminer l'ensemble des polynômes $p(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2$, de degré inférieur ou égal à deux, tels que $p(0) = y_0,\ p'(1) = y_1',\ p(2) = y_2$.

Discuter l'ensemble des solutions selon les valeurs des paramètres y_0, y_1' et y_2.

Exercice 3 :

Etant donnée une suite de $n+2$ points réels x_i tels que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b,$$

on considère l'ensemble Π_0^2 des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$, dont la restriction à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

1. Vérifier que Π_0^2 est un espace vectoriel.
2. Déterminer la dimension de Π_0^2 par analyse du nombre de degrés de liberté et du nombre de contraintes. Cette démarche est-elle rigoureuse ?
3. (*) Déterminer rigoureusement la dimension de Π_0^2 en introduisant une application linéaire φ de $\mathbb{R}^{3(n+1)}$ dans $\mathbb{R}^n$.

On considère maintenant le cas particulier $n = 1$ avec $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$, ainsi que la famille de fonctions $\mathcal{U} = \Big\{1,\ (x-x_0)_+,\ (x-x_0)_+^2,\ (x-x_1)_+,\ (x-x_1)_+^2\Big\}$.

4. Représenter précisément le graphe de chaque fonction de $\mathcal{U}$ sur une même figure.
5. Montrer que la famille $\mathcal{U}$ est une famille libre de l'espace vectoriel Π_0^2. *On pourra utiliser les points x_i et $\dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$.*