Université de Grenoble
MAP350 – L3 MI

DM : splines cubiques C^2 non uniformes

On rappelle ici dans un premier temps la méthode de construction vue en cours pour la fonction spline naturelle d'interpolation aux noeuds équidistants (c'est-à-dire, aux points d'interpolation équidistants).

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b,$$

avec $x_{i+1} - x_i = h,\ i = 0, 1, \cdots, n$.

L'esprit de la méthode est la suivante : sur chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ la fonction spline $s(x)$ est un polynôme $p_i(x)$ de degré inférieur ou égal à 3. D'après ce que nous avons vu à propos de l'interpolation d'Hermite, nous pouvons l'écrire de façon unique en fonction de ses valeurs et des valeurs de ses dérivées aux points x_i et x_{i+1}. Les valeurs de ces dérivées aux points x_i seront notées $y_i^{'}$: elles sont inconnues mais en écrivant les conditions de raccord des dérivées secondes :

$$p_{i-1}^{''}(x_i) = p_i^{''}(x_i),\ i = 2, 3, \ldots, n-1 \quad \text{et} \quad p_1^{''}(x_1) = p_{n-1}^{''}(x_n) = 0,$$

nous allons pouvoir déterminer de façon unique les valeurs de ces dérivées $y_i^{'}$.

Avant de procéder au calcul rappelons le lemme technique suivant :

Lemme 1 *Soit $\alpha \neq \beta$, $h = \beta - \alpha$ et p le polynôme de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant :*

$$p(\alpha) = y_\alpha,\ p(\beta) = y_\beta,\ p^{'}(\alpha) = y_\alpha^{'},\ p^{'}(\beta) = y_\beta^{'}.$$

On a :

$$p^{''}(\alpha) = \frac{2}{h^2}(3y_\beta - 3y_\alpha - 2hy_\alpha^{'} - hy'_\beta), \tag{1}$$

et

$$p^{''}(\beta) = \frac{2}{h^2}(3y_\alpha - 3y_\beta + 2hy_\beta^{'} + hy'_\alpha). \tag{2}$$

La méthode de construction

• Nous allons écrire maintenant les conditions de raccord des dérivées secondes au point x_i, $i = 2, ..., n-1$. La dérivée seconde en x_i du polynôme définit sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ est donné par la formule (2) en prenant

$$\alpha = x_{i-1}, \beta = x_i,$$

et avec des notations naturelles sa valeur est :

$$\frac{2}{h^2}(3y_{i-1} - 3y_i + 2hy_i^{'} + hy_{i-1}^{'}).$$

La dérivée seconde en x_i du polynôme définit sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est donné par la formule (1) en prenant

$$\alpha = x_i, \beta = x_{i+1},$$

et avec des notations naturelles sa valeur est :

$$\frac{2}{h^2}(3y_{i+1} - 3y_i - 2hy_i^{'} - hy_{i+1}^{'}).$$

En écrivant l'égalité on a :

$$y_{i-1}^{'} + 4y_i^{'} + y_{i+1}^{'} = \frac{3}{h}(y_{i+1} - y_{i-1}),$$

et ceci pour $i = 2, 3, \cdots n-1$.

• La condition de nullité de la dérivée seconde en x_1 s'écrit en utilisant la formule (1) avec $\alpha = x_1$, $\beta = x_2$, et donne :

$$0 = \frac{2}{h^2}(3y_2 - 3y_1 - 2hy_1' - hy_2'),$$

soit :

$$2y_1' + y_2' = \frac{3}{h}(y_2 - y_1).$$

• De même la condition de nullité de la dérivée seconde en x_n s'écrit en utilisant la formule (2) avec $\alpha = x_{n-1}, \beta = x_n$, et donne :

$$0 = \frac{2}{h^2}(3y_{n-1} - 3y_n + 2hy_n' + hy_{n-1}').$$

soit :

$$y_{n-1}' + 2y_n' = \frac{3}{h}(y_n - y_{n-1}).$$

• En résumé, les conditions nécessaires et suffisantes que doivent vérifier les dérivées aux points $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ sont données par le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & & & & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & & & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ \vdots \\ y_{n-2}' \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \frac{3}{h} \begin{pmatrix} y_2 - y_1 \\ y_3 - y_1 \\ y_4 - y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} - y_{n-3} \\ y_n - y_{n-2} \\ y_n - y_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Partie 1 *On souhaite résoudre ce système linéaire à l'aide de la méthode de Gauss, conduisant après triangulation au système suivant (où les coefficients a_i et b_i sont entiers) :*

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 & & & 0 \\ & 0 & a_3 & b_3 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & & \cdots & & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ \vdots \\ y_{n-2}' \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{n-2} \\ w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}.$$

1) *Expliciter le calcul (par récurrence) des coefficients a_i, b_i et w_i.*

2) *En déduire que ce système linéaire admet une solution unique.*

Partie 2 *On souhaite maintenant généraliser la construction précédente pour une spline non uniforme, c'est-à-dire associée à la suite de noeuds non équidistants*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b,$$

avec $x_{i+1} - x_i = h_i, \quad h_i > 0, \quad i = 0, 1, \cdots, n.$

3) *Ecrire le système linéaire [remplaçant le système (3)], permettant de déterminer la suite des dérivées y_i' pour la construction d'une spline d'interpolation cubique C^2.*