Université Joseph Fourier - Grenoble I **Année 2013-2014**
MAP350 – L3 MI

Examen du 09 décembre 2013

Exercice 1 : Une méthode de construction du polynôme d'interpolation.

On considère les $n+1$ points :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

et pour une fonction f définie sur $[a,b]$, on note

$$P_{i,k}(x,f)$$

le polynôme d'interpolation de f aux points

$$x_j\,, \quad i \le j \le i+k.$$

1. Préciser les polynômes
$$P_{i,0}(x,f)\,, \quad i = 0, 1, ..., n.$$
2. Montrer que pour $0 \le k \le n-1$, on a
$$P_{i,k+1}(x,f) = \frac{x - x_i}{x_{i+k+1} - x_i}\, P_{i+1,k}(x,f) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_i}\, P_{i,k}(x,f) \quad \text{pour } 0 \le i \le n-k-1\,.$$
<u>Indication</u> : *on étudiera les valeurs du polynôme $P_{i,k+1}(x,f)$ aux points x_j, $i+1 \le j \le i+k$ puis aux points x_i et x_{i+k+1}.*
3. Ecrire la formule précédente pour $k=0$ et $k=1$, puis utiliser cette méthode pour construire le polynôme d'interpolation associé aux données :
$$x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1,$$
pour une fonction f vérifiant
$$f(x_0) = 1, \quad f(x_1) = 0, \quad f(x_2) = 2.$$

Exercice 2 : Splines cubiques C^2 périodiques.

Etant donnée une suite de n points x_i $(n \ge 2)$ tels que

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

on considère l'ensemble E des fonctions de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, <u>périodiques</u>, de période $T = b - a$, dont la restriction à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est un polynôme de degré 3.

On considère par ailleurs l'espace $\Pi_2^3 = \Pi_2^3(x_1, ..., x_n)$ des splines cubiques C^2 associées à cette famille de noeuds x_i. On rappelle que Π_2^3 est l'ensemble des fonctions de classe C^2 sur $[a,b]$ dont la restriction à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, ..., n-1$ est un polynôme de degré 3.

1. Vérifier que E est un espace vectoriel.
2. On considère le cas $n = 2$ avec $a = 0$ et $b = 1$. Expliciter l'espace E. Donner sa dimension et une base.
3. On se place désormais dans le cas général avec $n > 2$. Pour un élément $f \in E$, on note $\hat{f}$ sa restriction à l'intervalle $[a, b]$ et on considère l'ensemble $\hat{E} = \{\hat{f}\ ,\ f \in E\}$.
   Vérifier que $\hat{E}$ est un sous espace vectoriel de Π_2^3.
4. Soit $s \in \Pi_2^3$. Ecrire les conditions nécessaires et suffisantes pour que $s \in \hat{E}$.
5. On rappelle que tout élément s de Π_2^3 s'écrit de manière unique sous la forme

$$s(x) = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i\, x^i + \sum_{i=2}^{n-1} \beta_i\, (x - x_i)_+^3\,, \quad x \in [a, b].$$

   a) Montrer que $\hat{E}$ est le noyau d'une application linéaire Φ de Π_2^3 dans $\mathbb{R}^3$.
   b) En identifiant Π_2^3 avec $\mathbb{R}^{n+2}$, écrire la matrice de $\Phi : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^3$, déterminer son rang et en déduire la dimension de $\hat{E}$.

Interpolation. – On considère maintenant une suite de n réels $y_1, y_2, ..., y_n$ et on souhaite interpoler les données (x_i, y_i), $i = 1, ..., n$ par une fonction de $\hat{E}$. Autrement dit, on cherche $\hat{f} \in \hat{E}$ tel que

$$\hat{f}(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

6. Les données y_i peuvent-elles toutes être choisies indépendamment ?

   On suppose désormais que les données y_i sont cohérentes au sens de la question précédente et que les noeuds x_i sont équirépartis dans $[a, b]$, autrement dit que $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 1, ..., n-1$ avec $h = (b-a)/(n-1)$. On propose de construire l'interpolant $\hat{f}$ selon une méthode semblable à celle des splines naturelles.
7. Quelles sont les inconnues à déterminer.
8. Ecrire le système linéaire permettant de déterminer ces inconnues.

Exercice 3 : Moindres carrés pondérés.

On considère le système d'équations linéaires :

$$\begin{array}{ccccccc} x & & & & & = & -2 \\ & & y & & & = & 1 \\ & & & & z & = & 2 \\ \alpha\, x & + & \alpha\, y & + & \alpha\, z & = & 0 \end{array}$$

1. Résoudre ce système (en fonction de α) par la méthode des moindres carrés.
2. Préciser la quantité que minimise cette solution.
3. Quelle est la valeur limite de la solution lorsque $\alpha \to +\infty$?