Université Joseph Fourier - Grenoble I **Année 2012-2013**
MAP350 – L3 MI

Examen du 10 décembre 2012

Exercice 1 :

On considère les 7 points distincts :

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5,\ x_6 = 6,$$

ainsi qu'une fonction f suffisamment dérivable qui vérifie :

$$\left\{\begin{array}{lllll} f(x_0) & = & 0 & & , \\ f(x_1) & = & \sum_{i=0}^{1} i^2 & = & 0^2+1^2, \\ f(x_2) & = & \sum_{i=0}^{2} i^2 & = & 0^2+1^2+2^2, \\ f(x_3) & = & \sum_{i=0}^{3} i^2 & = & 0^2+1^2+2^2+3^2, \\ f(x_4) & = & \sum_{i=0}^{4} i^2 & = & 0^2+1^2+2^2+3^2+4^2, \\ f(x_5) & = & \sum_{i=0}^{5} i^2 & = & 0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+5^2, \\ f(x_5) & = & \sum_{i=0}^{6} i^2 & = & 0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2. \end{array}\right.$$

1. Calculer les différences divisées
$$\delta[x_0; f], \delta[x_0, x_1; f], ..., \delta[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6; f].$$
2. En déduire le polynôme d'interpolation p de la fonction f aux points d'abscisses x_i.
3. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$$p(n) = \sum_{i=0}^{n} i^2 .$$
4. a) Pouvait-on éviter la preuve par récurrence dans la question précédente sachant que $\sum_{i=0}^{n} i^2$ est une fonction polynomiale de degré 3 de la variable n ?
   b) Pouvait-on déduire directement de la question 1 que $\sum_{i=0}^{n} i^2$ est une fonction polynomiale de degré 3 de la variable n ?

Exercice 2 :

Un phénomène physique relie deux quantités x et y ($y > 0$) selon un modèle (ou une loi) que l'on peut écrire :
$$y = a\, e^{bx+cx^2}$$
où $a > 0$, b et c sont trois paramètres inconnus. Des mesures fournissent un ensemble de données
$$(x_i, y_i),\ i = 1, 2, ..., n,$$
les valeurs y_i étant strictement positives.

1. En prenant pour inconnues $A = \ln a$, b et c, proposer une méthode d'approximation aux moindres carrés permettant d'estimer les paramètres a, b et c du modèle précédent.
2. En particulier on écrira le système linéaire 3×3 vérifié par les inconnues A, b et c, solutions aux moindres carrés de ce problème d'approximation.
3. Préciser la quantité que minimise cette solution.

Exercice 3 :

On considère la subdivision suivante de l'intervalle $[-3, 3]$:

$$x_0 = -3,\ x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1,\ x_5 = 2,\ x_6 = 3,$$

et on étudie certaines splines d'interpolation aux points x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Les splines considérées seront toutes cubiques C^2 et on désignera par $f_i(x)$ la restriction de la spline à l'intervalle $[i, i+1]$.

Première partie.

On souhaite montrer qu'il n'existe pas de spline naturelle d'interpolation (cubique C^2) σ, non identiquement nulle, telle que

$$\sigma(x) = 0 \text{ pour } x \in [-2, -1] \cup [1, 2].$$

1. Montrer que pour une telle spline les polynômes cubiques $f_{-1}(x)$ et $f_0(x)$ admettent chacun une racine triple, et en déduire l'expression générale de ces deux polynômes (dépendant chacun d'un paramètre à déterminer).

2. Ecrire les conditions de raccord C^2 en x_3.

3. Conclure.

Deuxième partie.

On souhaite maintenant déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des splines naturelles *paires* σ, telles que

$$\sigma(x) = 0 \text{ pour } x \in [-3, -2] \cup [2, 3].$$

1. Vérifier que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel.

2. Pour des paramètres réels α et β donnés, peut-on dire que l'unique spline naturelle d'interpolation associée aux données d'interpolation

   $$(-2, 0),\ (-1, \alpha),\ (0, \beta),\ (1, \alpha),\ (2, 0)$$

   appartient à $\mathcal{S}$? Justifier votre réponse.

   Soit maintenant un élément σ de $\mathcal{S}$ prenant la valeur α en -1 et 1 (parité oblige) et la valeur β en 0, et $f_0(x)$ et $f_1(x)$ ses restrictions à $[0, 1]$ et $[1, 2]$.

3. En s'inspirant de la méthode de la question 1 de la première partie, déterminer le polynôme cubique $f_1(x)$ en fonction du paramètre α.

4. Déduire des hypothèses la valeur de $f_0'(0)$.

5. Déterminer le polynôme cubique $f_0(x)$ en fonction des paramètres α (et β). *Il sera plus simple de chercher f_0 sous la forme :*

   $$f_0(x) = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3\,.$$

6. En déduire une relation entre α et β et expliciter la construction de σ.

7. Caractériser l'ensemble $\mathcal{S}$ à l'aide des splines naturelles d'interpolation.