Université Joseph Fourier, Grenoble I **Année 2010/2011**
MAP350

Examen : mercredi 8 décembre 2010
Durée : 2h - Documents autorisés

Exercice 1 : On se donne les 5 points distincts :

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4,$$

et une fonction f (par exemple dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$) qui vérifie :

$$\begin{cases} f(x_0) = \sum_{i=0}^{0} i = 0, \\ f(x_1) = \sum_{i=0}^{1} i = 1, \\ f(x_2) = \sum_{i=0}^{2} i = 1+2, \\ f(x_3) = \sum_{i=0}^{3} i = 1+2+3, \\ f(x_4) = \sum_{i=0}^{4} i = 1+2+3+4. \end{cases}$$

Question 1 : Calculer les différences divisées :

$$\delta[x_0; f], \delta[x_0, x_1; f], \cdots, \delta[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4; f].$$

Question 2 : En déduire p le polynôme d'interpolation de la fonction f.

Question 3 : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p(n) = \sum_{i=0}^{n} i.$$

Exercice 2 : On considère la fonction spline naturelle s passant par les points :

$$(-1, 1), (0, 2), (1, -1).$$

Question 1 : Ecrire le système d'équations vérifiées par les dérivées :

$$\alpha = s^{'}(-1), \beta = s^{'}(0), \gamma = s^{'}(1)$$

et le résoudre.

Question 2 : Donner, développés suivant les puissances de x, les polynômes expressions de la fonction spline sur l'intervalle $[-1, 0]$, puis sur l'intervalle $[0, 1]$.

Question 3 : Calculer $\int_{-1}^{1} (s''(t))^2 dt$.

Question 4 : Calculer p le polynôme d'interpolation passant par les points :

$$(-1, 1), (0, 2), (1, -1).$$

Question 5 : Calculer $\int_{-1}^{1} (p''(t))^2 dt$. Quelle remarque pouvez-vous faire ?

Exercice 3 : On considère la subdivision de l'intervalle $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b,$$

et on rappelle que Π_k^m est l'espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) des fonctions f définies sur $[a, b]$ telles que :

- f est sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ un polynome de degré $\leq m$,
- f appartient à $\mathcal{C}^k([a, b])$.

Les fonctions $(x - x_i)_+,\ i = 1, 2, \cdots n$ sont définies pour $x \in [a, b]$ par :

$$\begin{cases} (x - x_i)_+ = 0,\ x \leq x_i \\ (x - x_i)_+ = (x - x_i),\ x \geq x_i. \end{cases}$$

Question 1 : Montrer que les fonctions :

$$\begin{cases} 1, x, x^2 \\ (x - x_i)_+,\ i = 1, 2, \cdots, n, \\ (x - x_i)_+^2,\ i = 1, 2, \cdots, n, \end{cases}$$

sont linéairement indépendantes.

Question 2 : Montrer que les fonctions précédentes constituent une base de Π_0^2 et en déduire la dimension de Π_0^2.

Question 3 : Pour un entier $m \geq 2$ trouver une base et la dimension de Π_{m-2}^m.

Exercice 4 : Un phénomène physique lie la quantité $y > 0$ en fonction de x suivant une équation que l'on peut écrire :

$$y = a\ e^{\ (bx\ +\ cx^2)},$$

où $a > 0$, b et c sont trois constantes inconnues. Des mesures fournissent un ensemble de données :

$$(x_i, y_i),\ i = 1, 2, \cdots, n,$$

les valeurs y_i étant strictement positives.

On "linéarise" l'équation précédente en effectuant un changement de fonction et en considérant l'équation :

$$\ln y = \ln a + b\ x + \ c\ x^2.$$

Question 1 : En prenant pour inconnues $A = \ln a$, b et c , écrire sous forme matricielle le système d'équations :

$$\ln y_i = A + b\ x_i + \ c\ x_i^2,\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

Question 2 : Ecrire le système linéaire 3×3 vérifié par les inconnues $A = \ln a$, b et c solutions aux moindres carrés du système précédent.

Question 3 : Préciser la quantité minimisée par cette solution.