Université Joseph Fourier, Grenoble I **Année 2008/2009**
MAP350

Examen : mercredi 10 décembre 2008
Durée : 2h - Documents autorisés

Exercice 1 : Moindres carrés - Un phénomène physique suit une loi que l'on peut écrire :

$$y = a\ x + \frac{b}{x},$$

où a et b sont deux constantes inconnues. Des mesures fournissent un ensemble de données :

$$(x_i, y_i),\ i = 1, 2, \cdots, n,$$

les valeurs x_i étant strictement positives.

Question 1 : Ecrire sous forme matricielle le système d'équations :

$$y_i = a\ x_i + \frac{b}{x_i},\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

Question 2 : Ecrire le système 2×2 vérifié par les inconnues a et b solutions aux moindres carrés du système précédent.

Exercice 2 : On considère la fonction spline naturelle s passant par les points :

$$(-1, 1), (0, 2), (1, -1).$$

Question 1 : Ecrire le système d'équations vérifiées par les dérivées :

$$\alpha = s^{'}(-1), \beta = s^{'}(0), \gamma = s^{'}(1)$$

et le résoudre.

Question 2 : Donner, développés suivant les puissances de x, les polynômes expressions de la fonction spline sur l'intervalle $[-1, 0]$, puis sur l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 3 : On considère, une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ de la forme :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

et les fonctions $(x - x_i)_+,\ i = 0, 1, 2, \cdots n - 1$ définies sur $[a, b]$ par :

$$\begin{cases} (x - x_i)_+ = 0,\ x_0 \leq x \leq x_i \\ (x - x_i)_+ = (x - x_i),\ x_i \leq x \leq x_n \end{cases}$$

Dans les deux questions suivantes i désigne un indice $i \in \{0, 1, 2, \cdots n - 1\}$.

Question 1 : Montrer de façon détaillée que pour $k \geq 2$ la fonction $(x - x_i)_+^k$ est dérivable et admet pour dérivée : $k\ (x - x_i)_+^{k-1}$.

Question 2 : En déduire que pour $k \geq 2$ la fonction $(x - x_i)_+^k$ appartient à $\mathcal{C}^{k-1}([a, b])$.

On rappelle la notation du cours où Π_{m-1}^m est l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions f définies sur $[a, b]$ telles que :
- f est sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ un polynôme de degré $\leq m$,
- f appartient à $\mathcal{C}^{m-1}([a, b])$.

Question 3 : Montrer que les fonctions :

$$(x - x_i)_+^m, \ i = 0, 1, 2, \cdots, n - 1,$$

appartiennent à Π_{m-1}^m.

Question 4 (plus difficile) : Trouver une base de Π_{m-1}^m.

Exercice 4 : Une méthode de construction du polynôme d'interpolation
On considère les $n + 1$ points :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

et pour une fonction f définie sur $[a, b]$ on note :

$$P_{i,k}(x, f)$$

le polynôme d'interpolation de f aux points :

$$x_j, \ i \leq j \leq i + k.$$

Par exemple, si $k \geq 2$ on peut énumérer ces points :

$$x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}.$$

On commence par étudier le cas particulier de 3 points correspondant à $n = 2$:

$$x_0 < x_1 < x_2.$$

Question 1 : Quelles sont les polynômes :

$$P_{0,0}(x, f), P_{1,0}(x, f), P_{2,0}(x, f) \ ?$$

Question 2 : On considère les polynômes :

$$P_{0,1}(x, f), P_{1,1}(x, f).$$

1. En quels points les polynômes $P_{0,1}(x, f)$, $P_{1,1}(x, f)$ interpolent-ils respectivement la fonction f ?
2. Montrer que :

$$\begin{cases} P_{0,1}(x, f) = \frac{(x-x_0)P_{1,0}(x,f)-(x-x_1)P_{0,0}(x,f)}{x_1-x_0} \\ \\ P_{1,1}(x, f) = \frac{(x-x_1)P_{2,0}(x,f)-(x-x_2)P_{1,0}(x,f)}{x_2-x_1} \end{cases}$$

Question 3 : On considère le polynôme :

$$P_{0,2}(x,f).$$

1. En quels points le polynôme $P_{0,2}(x,f)$ interpole-t-il la fonction f ?
2. Montrer que :

$$\left\{ P_{0,2}(x,f) = \frac{(x-x_0)P_{1,1}(x,f)-(x-x_2)P_{0,1}(x,f)}{x_2-x_0} \right.$$

Question 4 : Un exemple - Traiter avec la méthode précédente le cas :

$$x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1,$$

avec :

$$f(x_0) = 1,\ f(x_1) = 1,\ f(x_2) = 3.$$

On détaillera les calculs de $P_{0,0}(x,f), P_{1,0}(x,f), P_{2,0}(x,f), P_{0,1}(x,f), P_{1,1}(x,f), P_{0,2}(x,f)$.

On esquisse maintenant le cas général :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Question 5 : Quelles sont les valeurs de :

$$P_{i,0}(x,f),\ i = 0,1,2,\cdots,n.$$

Question 6 : Montrer que pour $0 \leq k \leq n-1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{i,k+1}(x,f) = \frac{(x-x_i)P_{i+1,k}(x,f)-(x-x_{i+k+1})P_{i,k}(x,f)}{x_{i+k+1}-x_i} \\ \text{pour } 0 \leq i \leq n-k-1 \end{array} \right.$$

Question 7 (plus difficile) : Donner les grandes lignes d'une méthode pour calculer le polynôme d'interpolation de f aux points :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$