Université Joseph Fourier, Grenoble I **Année 2008/2009**
MAP350

Session II : Juillet 2009

Exercice 1 :

Question 1 : Déterminer les polynômes de Lagrange relatifs aux points :

$$x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1.$$

Question 2 : En déduire l'unique polynôme $p(x)$ de degré inférieur ou égal à 2 et qui vérifie :

$$p(-1) = 1,\ p(0) = 1,\ p(1) = 3.$$

On développera ce polynôme précédent sur la base des monômes.

Exercice 2 : On considère la subdivision :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b.$$

On note Π_0^1 de fonctions f tels que :

- f est sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ un polynome de degré ≤ 1,
- f appartient à $\mathcal{C}^0([a,b])$.

Question 1 : Montrer que Π_0^1 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([a,b])$.

On admettra que la dimension de Π_0^1 est $n+2$.

Les fonctions $(x - x_i)_+,\ i = 1, 2, \cdots n$ sont définies sur $[a,b]$ par :

$$\begin{cases} (x - x_i)_+ = 0,\ x \leq x_i \\ (x - x_i)_+ = (x - x_i),\ x \geq x_i \end{cases}$$

Question 2 : Montrer que les fonctions :

$$\begin{cases} 1, x, \\ (x - x_i)_+,\ i = 1, 2, \cdots, n. \end{cases}$$

constituent une base de Π_0^1.

Exercice 3 : Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ on se donne n points :

$$m_i = (x_i, y_i, z_i),\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

On cherche un plan sous la forme :

$$z = ax + by + c,$$

passant "au mieux" par les points m_i.

Question 1 : Ecrire sous forme matricielle le système d'équations :

$$ax_i + by_i + c = z_i,\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

Question 2 : Ecrire le système linéaire 3×3 que vérifie le vecteur

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

minimisant la quantité :

$$\sum_{i=1}^{n} \mid z_i - ax_i - by_i - c \mid^2 .$$