

Session II : Juillet 2008
Durée : 1 heure - Documents autorisés.

Exercice 1 : Question 1 : La fonction :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0] \\ x^2, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

est-elle correctement définie et à quel espace de fonction $\mathcal{C}^n([-1, 1])$ appartient-elle ?

Exercice 2 :

Question 1 : Déterminer les polynômes de Lagrange relatifs aux points :

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

Question 2 : En déduire l'unique polynôme $p(x)$ de degré inférieur ou égal à 2 et qui vérifie :

$$p(-1) = 1, \quad p(0) = 1, \quad p(2) = 3.$$

On développera ce polynôme précédent sur la base des monômes.

Exercice 3 : On considère la subdivision :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b.$$

On note Π_0^1 de fonctions f tels que :

- f est sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ un polynôme de degré ≤ 1 ,
- f appartient à $\mathcal{C}^0([a, b])$.

Question 1 : Montrer que Π_0^1 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([a, b])$.

On admettra que la dimension de Π_0^1 est $n + 2$.

Les fonctions $(x - x_i)_+$, $i = 1, 2, \dots, n$ sont définies sur $[a, b]$ par :

$$\begin{cases} (x - x_i)_+ = 0, & x \leq x_i \\ (x - x_i)_+ = (x - x_i), & x \geq x_i \end{cases}$$

Question 2 : Montrer que les fonctions :

$$\begin{cases} 1, x, \\ (x - x_i)_+, & i = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

constituent une base de Π_0^1 .

Exercice 4 : Dans l'espace \mathbb{R}^3 on se donne n points :

$$m_i = (x_i, y_i, z_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

On cherche un plan Π **passant par l'origine**, sous la forme :

$$z = ax + by,$$

passant "au mieux" par les points m_i .

Question 1 : Ecrire sous forme matricielle le système d'équations :

$$ax_i + by_i = z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Question 2 : Ecrire le système linéaire 2×2 que vérifie le vecteur

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

minimisant la quantité :

$$\sum_{i=1}^n |z_i - ax_i - by_i|^2.$$