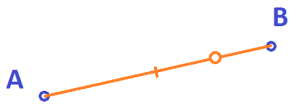
Auto-Test -- CORRIGE

Représentation des courbes et surfaces – Courbes de Bézier

Partie A

		Oui	Non
L'ensemble des points (x,y) tels que $2x^2 + 3y^2 - 1 = 0$	représente une courbe plane	oui	
	est une équation paramétrique		non
	est une équation explicite		non
$t \in [a,b] \rightarrow \begin{pmatrix} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{pmatrix}$	est l'équation explicite d'une courbe de R^3		non
	est une représentation paramétrique d'une surface de l'espace R^3		non
	est une représentation paramétrique d'une courbe de l'espace	oui	
Le graphe d'une fonction de R^2 *dans* R :	est une courbe plane		non
	est une surface	oui	
	est une courbe « gauche » de l'espace		non
Tracez le barycentre des points A et B de poids respectif 1/4 et 3/4			
L'ensemble des barycentres des points A et B ci-dessus est :	un cercle		non
	le plan(en entier)		non
	une droite	oui	
L'ensemble des combinaisons convexes des points A et B ci-dessus est :	la droite (AB)		non
	le segment [A,B]	oui	
Citez les propriétés des polynômes de Bernstein qui assurent qu'une courbe de Bézier est contenue dans l'enveloppe convexe de son polygone de contrôle	1) **Partition de l'unité** 2) **Positivité sur [0,1]**		
L'algorithme de De-Casteljau	calcule l'enveloppe convexe du polygone de contrôle d'une courbe de Bézier		non
	calcule l'image d'un point P(t) de la courbe	oui	
	calcule l'image de toute la courbe		non
	est un schéma « triangulaire »	oui	
	est basée sur des combinaisons convexes	oui	
L'algorithme de subdivision	fournit 2 courbes de Bézier de même degré	oui	

Partie B

On considère la courbe de Bézier plane

$$t \in [0,1] \mapsto P(t) \in R^2$$

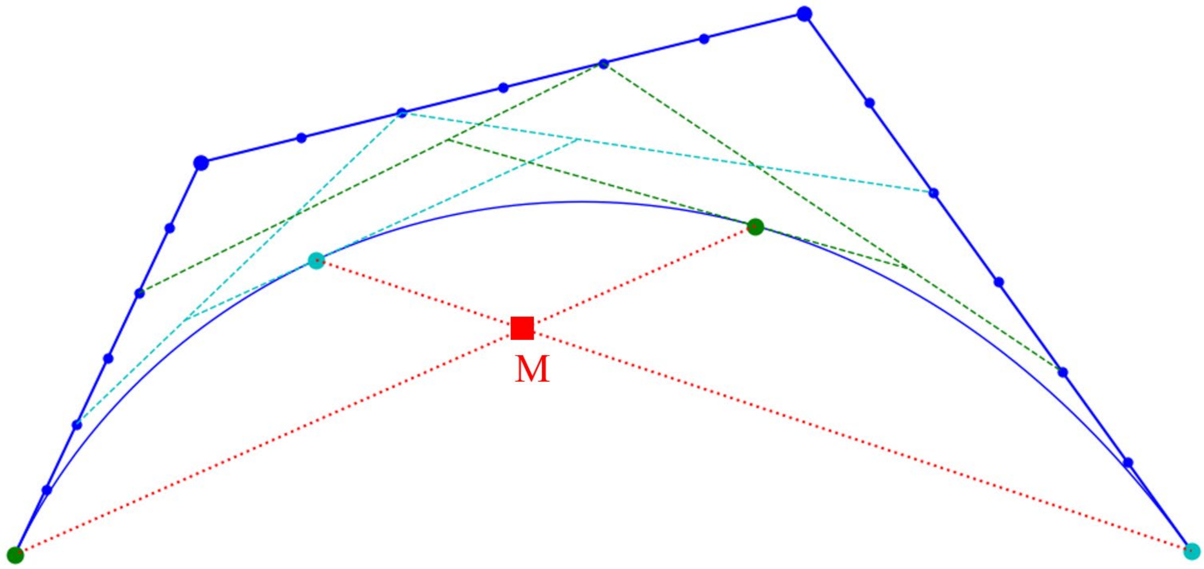
dont le polygone de contrôle est donnée ci-dessous.

Déterminer <u>graphiquement</u> le point

$$M = \left(P(0)\,P\left(\frac{2}{3}\right)\right) \cap \left(P(1)\,P\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

intersection des droites $\left(P(0)\,P\left(\frac{2}{3}\right)\right)$ et $\left(P(1)\,P\left(\frac{1}{3}\right)\right)$

La construction sera soignée et vous justifierez **<u>brièvement</u>** les points qui vous semblent importants.



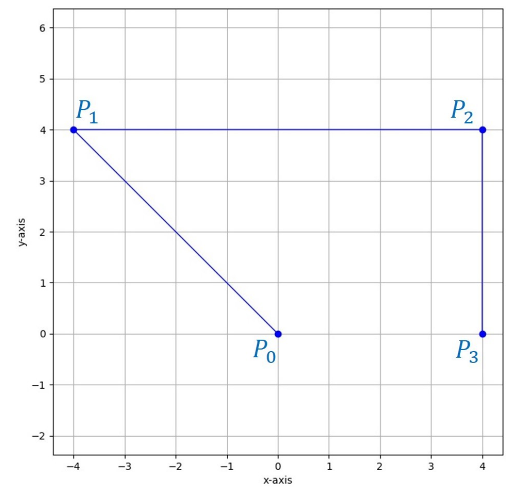
Brèves justifications :

1. Il s'agit d'une courbe de Bézier de degré 3
2. Les points $P(0)$ et $P(1)$ sont les points extrêmes du polygone de contrôle
3. Il n'est pas précisé l'ordre de parcours du polygone de contrôle P_0, P_1, P_2, P_3, néanmoins les propriétés de symétrie des courbes de Bézier montrent que si on inverse cet ordre de parcours alors le point $P(\frac{1}{3})$ devient le point $P\left(\frac{2}{3}\right)$ et vice-versa, et de même les points $P(0)$ et $P(1)$ sont échangés, ce qui au final conduit au même point M dans les 2 cas.
4. On applique donc l'algorithme de de-Casteljau pour $t = \frac{1}{3}$ et $t = \frac{2}{3}$

TD : courbes de Bézier (2) — corrigé

Exercise 1

On considère la courbe de Bézier plane cubique $P(t) = \sum_{i=0}^{3} P_i\, B_i^3(t)\,,\ \ t \in [0,1]$*, dont les points de contrôle sont définis par la figure ci-contre.*



1. *Déterminer graphiquement le point* $P(1/2)$ *et donner les coordonnées de ce point.*
   Les points introduits seront notés $A, B, C, D, \ldots$

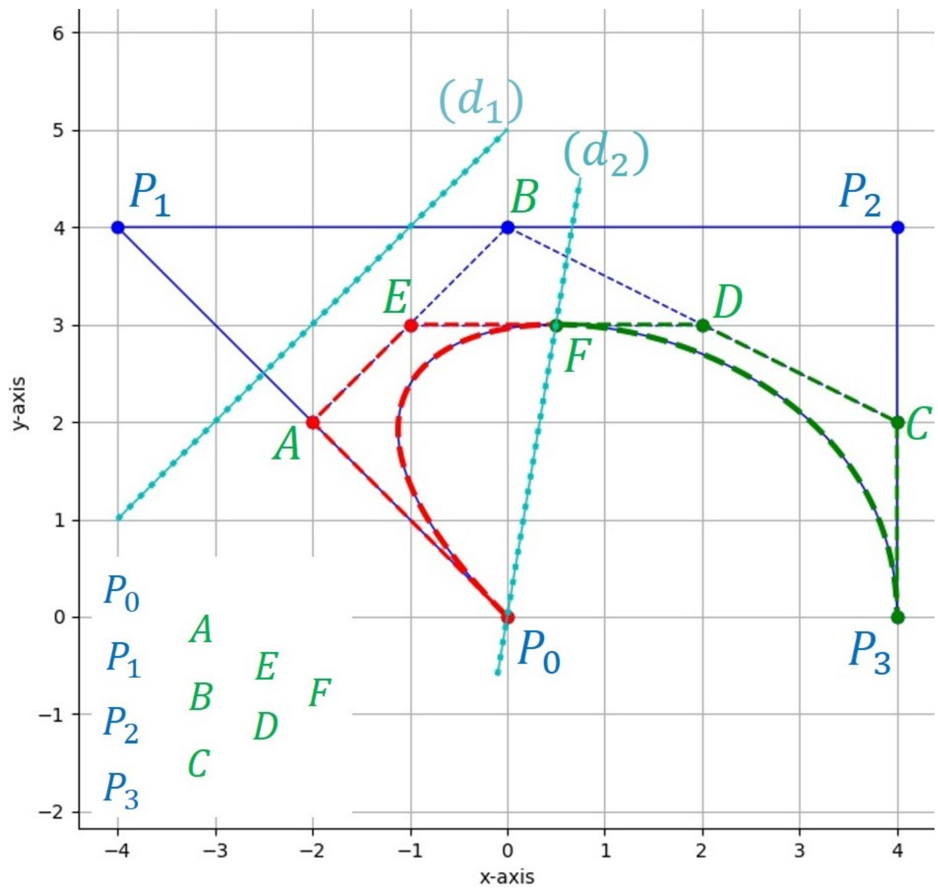
2. *On souhaite subdiviser cette courbe de Bézier selon le paramètre* $1/2$*. Préciser et tracer graphiquement les 2 polygones de controles obtenus (en rouge et en vert).*

3. *a) Tracer les 2 droites d'équation (en pointillé bleu)*
   $$(d1) : y = x + 5 \quad \text{et} \quad (d2) : y = 6\,x$$
   b) Déterminer graphiquement les intersections de chacune de ces droites avec la courbe de Bézier initiale.

4. *Donner les composantes du vecteur dérivé* $\overrightarrow{P'(1)}$*.*

5. *Dans le cas général (c'est-à-dire, pour une courbe de Bézier de degré* n*), combien de multiplications/divisions sont nécessaires (par composante) pour évaluer* $P(t),\ t \in]0,1[$ *à l'aide de l'algorithme de De-Casteljau ?*

Corrigé



1. Coordonnées de $\mathbf{P}(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}) = (\mathbf{0.5},\ \mathbf{3})$

2. Polygone de contrôle de :
   la première courbe subdivisée (en rouge) : $\mathbf{P_0}, \mathbf{A}, \mathbf{E}, \mathbf{F}$

   la deuxième courbe subdivisée (en vert) : $\mathbf{F}, \mathbf{D}, \mathbf{C}, \mathbf{P_3}$

3. Intersection de la courbe de Bézier avec : (*donner une brève justification*)

La droite $(d1)$	La droite $(d2)$
aucune intersection La droite $(d1)$ ne rencontre aucun des 2 polygones subdivisés	2 points : $P(0) = P_0$ et $P(1/2) = F$ La droite $(d2)$ passe par les points P_0 et F Il ne peut pas y avoir d'autre intersection car le nombre d'intersections avec la courbe doit être inférieur au nombre d'intersections avec le polygone

4. Composantes du vecteur $\overrightarrow{P'(1)} = \mathbf{3}\ \overrightarrow{P_2P_3} = \mathbf{3}\,(\mathbf{0}, -\mathbf{4}) = (\mathbf{0}, -\mathbf{12})$

5. Nombre de multiplications/divisions : $n(n+1)$

   Brève justification : schéma triangulaire $\Rightarrow$ $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ combinaisons convexes du type $(1-t) * P + t * Q$

Exercise 2

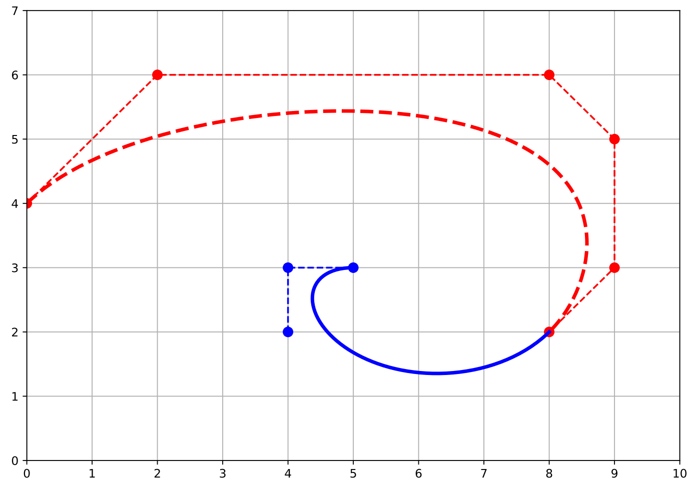
On considère les deux courbes de Bézier représentées ci-dessous en trait continu et pointillé.

On note $P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\, P_i$ *la courbe rouge en trait pointillé, avec* $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ *et* $Q(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\, Q_i$ *la courbe bleue en trait continu dont le dernier point de contrôle est* $Q_n = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Ces deux courbes sont de même degré et ont un contact* C^2 *en leur point commun.*

1. *Quel est le degré commun de ces 2 courbes de Bézier ?*

2. *Déterminer les points de contrôle* Q_i, $i = 0, 1, \ldots$ *de la courbe de Bézier* $Q(t)$, *non donnés sur la figure jointe. Justifiez votre réponse.*

3. *On souhaite approcher la courbe de Bézier* $Q(t)$ *par une courbe paramétrée polynomiale* $q(t)$ *de degré 8 basée l'approximation aux moindres carrés des points* $Q(t_i)$, $t_i = i/20$, $i = 0, 1, \ldots, 20$. *Donner une majoration de l'erreur commise.*



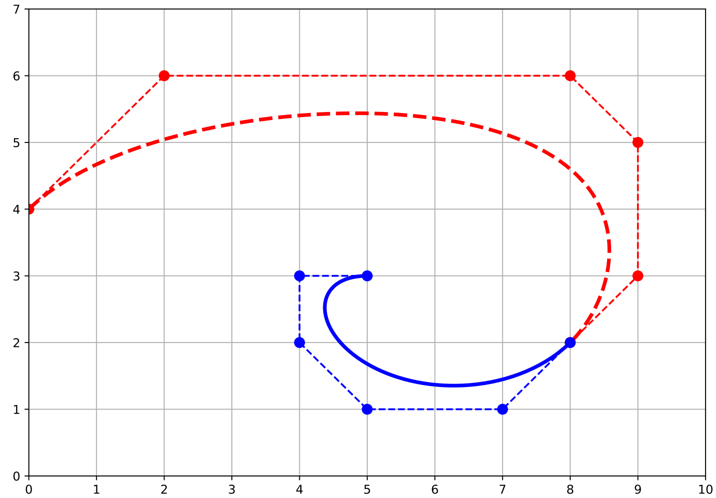
Corrigé

1. Ces deux courbes ont 6 points de contrôle et sont donc de degré 5.

2.
$$
\begin{array}{llll}
\text{contact } C^0 & : & P(1) = Q(0) & \Leftrightarrow \; P_5 = Q_0 \\
 & & & \Rightarrow \; Q_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\text{contact } C^1 & : & P'(1) = Q'(0) & \Leftrightarrow \; 5\,(P_5 - P_4) = 5\,(Q_1 - Q_0) \\
 & & & \Leftrightarrow \; \overrightarrow{P_4P_5} = \overrightarrow{Q_0Q_1} \\
 & & & \Rightarrow \; Q_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\text{contact } C^2 & : & P''(1) = Q''(0) & \Leftrightarrow \; 5 \times 4\,(P_5 - 2\,P_4 + P_3) = 5 \times 4\,(Q_2 - 2\,Q_1 + Q_0) \\
 & & & \Leftrightarrow \; Q_2 - P_3 = 2\,(Q_1 - P_4) \\
 & & & \Leftrightarrow \; \overrightarrow{P_3Q_2} = 2\,\overrightarrow{P_4Q_1} \\
 & & & \Rightarrow \; Q_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

3.

L'erreur sera bien évidemment nulle : les courbes paramétrées $q(t)$ et $Q(t)$ seront confondues. En effet, l'interpolation ou l'approximation aux moindres carrés d'un polynôme de degré 5 en 21 points par un autre polynôme de degré 8 (en fait ≤ 8) conduit nécessairement à l'égalité des 2 polynômes, soit ici $q(t) = Q(t)$.
Le raisonnement vectoriel est plus simple mais il était également possible de raisonner sur chaque composante polynomiale et de montrer que $q_x(t) = Q_x(t)$ et $q_y(t) = Q_y(t)$.



Exercises

11.1 General interpolation

Exercise 1.1

We consider the space $E = \text{Vect}\{1, x^2, x^6\} \subset \mathbb{R}[x]$.

1. *Verify that* E *is a vector space. What is its dimension ?*
2. *We consider the problem of interpolating the following dataset by a polynomial* $p \in E$

	$i=0$	$i=1$	$i=2$
x_i	-2	-1	2
y_i	3	0	5

Discuss the existence and uniqueness of this interpolation problem.

Exercise 1.2

Consider the following points of the curve defined by the equation $y = f(x) = x\,\sin(\frac{\pi}{2} + 2\,\pi\,x)$

	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
x_i	0	1	2	3	4
y_i	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$

1. *Determine the interpolating polynomial of data* (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, 4$.
2. *We add the interpolating point* $(x_5, y_5) = (-1, -1)$.
   Determine the interpolating polynomial of data (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, 5$.

Exercise 1.3

We propose to evaluate the determinant of the Vandermonde matrix

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{pmatrix}$$

where the x_i *are all distinct. – With the following operations on columns* C_j *:*

$$C_j \;:=\; C_j - x_0\, C_{j-1} \qquad \text{for} \quad j = n+1,\, n,\, n-1, \ldots,\, 2,$$

deduce a relation between $\det V(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *and* $\det V(x_1, \ldots, x_n)$, *and then conclude by recurrence.*

Exercise 1.4

Consider a function $f \in C^0([a,b])$ *and three distinct points* x_0, x_1, x_2 *in* $[a,b]$. *Let* $p_{0,1}(x)$ *be the interpolating polynomial of* f *at points* x_0 *and* x_1 *and* $p_{1,2}(x)$ *the interpolating polynomial of* f *at points* x_1 *and* x_2.
1) Prove that the polynomial $p(x) = \dfrac{x - x_0}{x_2 - x_0}\, p_{1,2}(x) + \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_0}\, p_{0,1}(x)$ *is the interpolating polynomial of* f *at points* x_0, x_1, x_2.
2) Apply this method to the function $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2$ *with points* $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, *and then with points* $x_0 = 1$, $x_1 = 4$, $x_2 = 0$.

Exercise 1.5

On considère les 6 points distincts de la parabole d'équation $y = x^2$

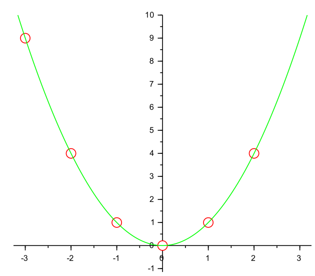
	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
x_i	-3	-2	-1	0	1	2
y_i	9	4	1	0	1	4

1. *Déterminer le polynôme d'interpolation des données* (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, 5$.

2. *On ajoute la donnée d'interpolation* $(x_6, y_6) = (3, 729)$.
Déterminer le polynôme d'interpolation des données (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, 6$. *Ce polynôme sera exprimé dans la base de Newton relativement aux points d'interpolation.*

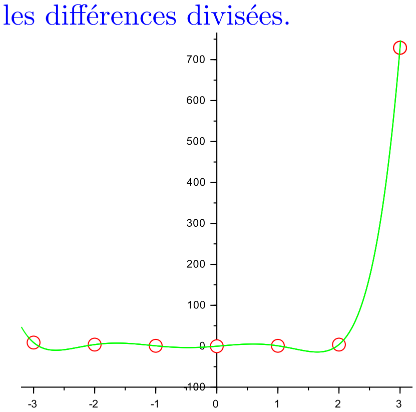
Solution

1. Le polynôme d'interpolation des données (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, 5$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 5, et qui est bien évidemment ici le polynôme $P_5(x) = x^2$, de degré 2.



2. Pour cette question on utilise la base de Newton et les différences divisées.

x_i	y_i					
-3	9					
-2	4	-5				
-1	1	-3	1			
0	0	-1	1	0		
1	1	1	1	0	0	
2	4	3	1	0	0	0
3	729	725	361	120	30	6	1



Ainsi, le polynôme d'interpolation des données (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, 6$ s'écrit

$$\begin{aligned}
P_6(x) &= 9.N_0(x) - 5.N_1(x) + 1.N_2(x) + 0.N_3(x) + 0.N_4(x) + 0.N_5(x) + 1.N_6(x) \\
&= \underbrace{9 - 5\,(x+3) + (x+3)(x+2) + 0 + 0 + 0}_{P_5(x)=x^2} + N_6(x) \\
&= x^2 + (x+3)(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2) \\
&= 12\,x + 5\,x^2 - 15\,x^3 - 5\,x^4 + 3\,x^5 + x^6
\end{aligned}$$

11.2 Newton & divided differences

Exercise 1.6 (*DS octobre 2019*)

1. *Déterminer le polynôme* $p(x)$ *de l'espace vectoriel* $\mathrm{Vect}\{1 + x^2,\, x^5\}$ *qui interpole les points* $(0, 2)$ *et* $(1, 3)$.

2. *Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange* $q(x)$ *de* $\mathbb{R}[x]$ *qui interpole les points*

$$(-2, p(-2)),\ (-1, p(-1)),\ (0, 2),\ (1, 3),\ (2, p(2)),\ (3, p(3)).$$

3. *Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange* $u(x)$ *de* $\mathbb{R}[x]$ *qui interpole les points*

$$(-1, p(-1)),\ (0, 2),\ (1, 3),\ (2, p(2)).$$

Solution

1. On cherche donc un polynôme $P(x) = \alpha\,(1 + x^2) + \beta\, x^5$ tel que

$$\begin{cases} P(0) &= 2 \\ P(1) &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= 2 \\ 2\alpha + \beta &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= 2 \\ \beta &= -1 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad p(x) = 2(1 + x^2) - x^5.$$

2. Les 6 points donnés (d'abscisses deux à deux distinctes) appartiennent au graphe du polynôme $p(x) \in \mathbb{R}_5[x]$. L'unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange conduit donc à $q(x) = p(x)$.

3. Ces 4 points appartiennent au graphe du polynôme $p(x) \in \mathbb{R}_5[x]$, qui néanmoins n'est pas le polynôme d'interpolation de Lagrange, car celui-ci doit être de degré ≤ 3. Nous déterminons ce polynôme de degré 3 dans la base de Newton.

x_i	y_i			
-1	5			
0	2	-3		
1	3	1	2	
2	-22	-25	-13	-5

$$\begin{aligned} u(x) &= 5 - 3\,(x+1) + 2\,(x+1)(x-0) - 5\,(x+1)(x-0)(x-1) \\ &= 2 + 4\,x + 2\,x^2 - 5\,x^3 \end{aligned}$$

Exercise 1.7 (*Neville algorithm*)

Let $f \in C[a, b]$ *and* $n + 1$ *distinct points* x_i *in* $[a, b]$*. We first prove the Neville formula stated in proposition 1.9*

$$P_{i,p}(x, f) = \frac{x - x_i}{x_{i+p} - x_i}\, P_{i+1,p-1}(x, f) + \frac{x_{i+p} - x}{x_{i+p} - x_i}\, P_{i,p-1}(x, f) \qquad \text{for} \quad \begin{smallmatrix} 1 \leq p \leq n \\ 0 \leq i \leq n-p \end{smallmatrix}$$

where $P_{i,p}(x, f)$ *is the interpolating polynomial of the function* f *at points* $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p}$

1. *Specify the degree of polynomial* $P_{i,p}(x, f)$*.*

2. *Specify polynomials* $P_{i,0}(x, f)\,, \quad i = 0, 1, ..., n.$

3. *Prove the Neville formula.*

We now consider an application example which illustrates the Neville algorithm.

4. *Specify the Neville formula for* $p = 1$ *and* $p = 2$*.*

5. *Use this approach to construct the interpolating polynomial of* f *associated with data*

$x_0 = -1$	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$
$f(x_0) = 1$	$f(x_1) = 0$	$f(x_2) = 2$

We now study the link with Newton interpolation.

6. *Let* $\delta_{i,p}$ *be the coefficient of* x^p *in polynomial* $P_{i,p}(x, f)$*. Prove that*

$$P_{i+1,p}(x, f) - P_{i,p}(x, f) = \big(\delta_{i+1,p} - \delta_{i,p}\big)\,(x - x_{i+1})(x - x_{i+2}) \cdots (x - x_{i+p})$$

7. *With relation* $P_{i,p+1}(x,f) - P_{i,p}(x,f) = P_{i,p+1}(x,f) - P_{i+1,p}(x,f) + P_{i+1,p}(x,f) - P_{i,p}(x,f)$ *prove that* $\delta_{i,p+1}\,(x_{i+p+1} - x_i) = \delta_{i+1,p} - \delta_{i,p}$ *and deduce the recurrence relation defining the divided differences.*

Solution

1. Le polynôme $P_{i,p}(x,f)$ est de degré p car il interpole f aux $p+1$ points $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p}$.

2. $P_{i,0}(x,f)$ est le polynôme d'interpolation au seul point x_i, soit $P_{i,0}(x,f) = f(x_i)$ (polynôme constant de degré 0).

3. $P_{i,p}(x,f)$ est de degré p et interpole f aux points $x_i, \ldots, x_{i+p}$
$P_{i+1,p-1}(x,f)$ est de degré $p-1$ et interpole f aux points $x_{i+1}, \ldots, x_{i+p}$
$P_{i,p-1}(x,f)$ est de degré $p-1$ et interpole f aux points $x_i, \ldots, x_{i+p-1}$

   Notons $\varphi(x)$ le second membre de l'égalité à démontrer et évaluons φ aux points indiqués ci-dessous.

   Point x_i :

$$\begin{aligned}\varphi(x_i) &= \frac{x_i - x_i}{x_{i+p} - x_i}\,P_{i+1,p-1}(x_i,f) + \frac{x_{i+p} - x_i}{x_{i+p} - x_i}\,P_{i,p-1}(x_i,f)\\ &= 0 \,+\, P_{i,p-1}(x_i,f) = f(x_i)\\ &= P_{i,p}(x_i,f)\end{aligned}$$

   Points x_j $(i+1 \le j \le i+p-1)$:

$$\begin{aligned}\varphi(x_j) &= \frac{x_j - x_i}{x_{i+p} - x_i}\,P_{i+1,p-1}(x_j,f) + \frac{x_{i+p} - x_j}{x_{i+p} - x_i}\,P_{i,p-1}(x_j,f)\\ &= \frac{x_j - x_i}{x_{i+p} - x_i}\,f(x_j) + \frac{x_{i+p} - x_j}{x_{i+p} - x_i}\,f(x_j) = f(x_j)\\ &= P_{i,p}(x_j,f)\end{aligned}$$

   Point x_{i+p} :

$$\begin{aligned}\varphi(x_{i+p}) &= \frac{x_{i+p} - x_i}{x_{i+p} - x_i}\,P_{i+1,p-1}(x_{i+p},f) + \frac{x_{i+p} - x_{i+p}}{x_{i+p} - x_i}\,P_{i,p-1}(x_{i+p},f)\\ &= P_{i+1,p-1}(x_{i+p},f) \,+\, 0 = f(x_{i+p})\\ &= P_{i,p}(x_{i+p},f)\end{aligned}$$

   Ainsi, puisque $\varphi(x)$ est de degré p et coincide avec $P_{i,p}(x,f)$ en $p+1$ points distincts on en déduit l'égalité annoncée. Le résultat se déduit également de l'unicité du polynôme d'interpolation.

4. Ecrivons cette formule pour $p=1$ et $p=2$:

$$\begin{aligned}p=1: \qquad P_{i,1}(x,f) &= \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\,P_{i+1,0}(x,f) + \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}\,P_{i,0}(x,f)\\ &= \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\,f(x_{i+1}) + \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}\,f(x_i)\end{aligned}$$

$$p=2: \qquad P_{i,2}(x,f) = \frac{x - x_i}{x_{i+2} - x_i}\,P_{i+1,1}(x,f) + \frac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_i}\,P_{i,1}(x,f)$$

5. Avec les données numériques proposées on obtient :

$$P_{0,1}(x,f) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1) + \frac{x_1-x}{x_1-x_0} f(x_0) = -x$$

$$P_{1,1}(x,f) = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2) + \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) = 2\,x$$

$$P_{0,2}(x,f) = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} P_{1,1}(x,f) + \frac{x_2-x}{x_2-x_0} P_{0,1}(x,f) = \frac{1}{2}\,x\,(3x+1)$$

Ces calculs sont résumés dans le schéma triangulaire ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccc}
x_0=-1 & & x_1=0 & & x_2=1 \\
 & & & & \\
P_{0,0}(x,f) & & P_{1,0}(x,f) & & P_{2,0}(x,f) \\
\shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\
f(x_0)=1 & & f(x_1)=0 & & f(x_2)=2 \\
 & \searrow \quad \swarrow & & \searrow \quad \swarrow & \\
 & P_{0,1}(x,f) & & P_{1,1}(x,f) & \\
 & \shortparallel & & \shortparallel & \\
 & -x & & 2\,x & \\
 & & \searrow \quad \swarrow & & \\
 & & P_{0,2}(x,f) & & \\
 & & \shortparallel & & \\
 & & \frac{1}{2}\,x\,(3x+1) & &
\end{array}$$

6. Polynomial $P_{i+1,p}(x,f) - P_{i,p}(x,f)$ is of degree p and vanishes at points $x_{i+1},\dots,x_{i+p}$, which leads to

$$\underbrace{P_{i+1,p}(x,f) - P_{i,p}(x,f)}_{(\delta_{i+1,p}-\delta_{i,p})\,x^p+\cdots} = \lambda\ \underbrace{(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})\cdots(x-x_{i+p})}_{x^p+\cdots}$$

where the "$\cdots$" represent terms of degree less than or equal to $p-1$, so that $\lambda = \delta_{i+1,p} - \delta_{i,p}$, which gives the result.

7. We specify the different terms of the given relation

$$\underbrace{P_{i,p+1}(x,f) - P_{i,p}(x,f)}_{\delta_{i,p+1}\,\Pi_{j=i}^{i+p}(x-x_j)} = \underbrace{P_{i,p+1}(x,f) - P_{i+1,p}(x,f)}_{\delta_{i,p+1}\,\Pi_{j=i+1}^{i+p+1}(x-x_j)} + \underbrace{P_{i+1,p}(x,f) - P_{i,p}(x,f)}_{(\delta_{i+1,p}-\delta_{i,p})\,\Pi_{j=i+1}^{i+p}(x-x_j)}$$

Then, after simplification by the factor $\Pi_{j=i+1}^{i+p}(x-x_j)$ we get

$$\delta_{i,p+1}\,(x-x_i) = \delta_{i,p+1}\,(x-x_{i+p+1}) + \delta_{i+1,p} - \delta_{i,p}$$

which gives the desired relation $\delta_{i,p+1} = \dfrac{\delta_{i+1,p}-\delta_{i,p}}{x_{i+p+1}-x_i}$.

One can notice that this relation is the recurrence relation (1.2) defining the divided differences... For this, we just need to remark that the coefficient $\delta_{i,p}$ of x^p in polynomial $P_{i,p}(x,f)$ is equal to the divided difference $f[x_i,\dots,x_{i+p}]$.

Exercise 1.8

Consider the following points of the parabola defined by the equation $y = x^2$

	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
x_i	-3	-2	-1	0	1	2
y_i	9	4	1	0	1	4

1. *Determine the interpolating polynomial of data* (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, 5$.

2. *We add the interpolating point* $(x_6, y_6) = (3, 729)$.
Determine the interpolating polynomial of data (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, 6$. *This polynomial will be expressed with respect to the Newton basis according to points the interpolation points.*

Exercise 1.9

Consider the following points of the curve defined by the equation $y = f(x) = x\,\sin(\frac{\pi}{2} + 2\,\pi\,x)$

	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
x_i	0	1	2	3	4
y_i	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$

1. *Determine the interpolating polynomial of data* (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, 4$.

2. *We add the interpolating point* $(x_5, y_5) = (-1, -1)$.
Determine the interpolating polynomial of data (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, 5$.

3. *We add the interpolating point* $(x_6, y_6) = (5, 0)$.
Determine the interpolating polynomial of data (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, 6$.

Exercise 1.10

Consider the 7 distinct points :

$$x_0 = 0,\; x_1 = 1,\; x_2 = 2,\; x_3 = 3,\; x_4 = 4,\; x_5 = 5,\; x_6 = 6,$$

and a sufficiently smooth function f *which satisfies*

$$\left\{ \begin{array}{lllll} f(x_0) & = & 0 & & \\ f(x_1) & = & \sum_{i=0}^{1} i^2 & = & 0^2 + 1^2 \\ f(x_2) & = & \sum_{i=0}^{2} i^2 & = & 0^2 + 1^2 + 2^2 \\ f(x_3) & = & \sum_{i=0}^{3} i^2 & = & 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 \\ f(x_4) & = & \sum_{i=0}^{4} i^2 & = & 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \\ f(x_5) & = & \sum_{i=0}^{5} i^2 & = & 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 \\ f(x_6) & = & \sum_{i=0}^{6} i^2 & = & 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 \end{array} \right.$$

1. *Determine the divided differences*
$$f[x_0],\; f[x_0, x_1],\; f[x_0, x_1, x_2],\; \ldots,\; f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6].$$

2. *Deduce the interpolating polynomial* $p_6(x)$ *of the function* f *at points* x_i.

3. *Prove by induction that* $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2 = p_6(n)$ *for all* $n \in \mathbb{N}$.

4. *Is the proof by induction necessary if we know that* $\sum_{i=0}^{n} i^2$ *is a polynomial function of degree 3 of the variable* n.

Exercise 1.11

Consider the 5 distinct points :

$$x_0 = 0,\, x_1 = 1,\, x_2 = 2,\, x_3 = 3,\, x_4 = 4\,,$$

and a sufficiently smooth function f which satisfies

$$\begin{cases} f(x_0) &= \sum_{i=0}^{0}(2\,i+1) &= 1, \\ f(x_1) &= \sum_{i=0}^{1}(2\,i+1) &= 1+3, \\ f(x_2) &= \sum_{i=0}^{2}(2\,i+1) &= 1+3+5, \\ f(x_3) &= \sum_{i=0}^{3}(2\,i+1) &= 1+3+5+7, \\ f(x_4) &= \sum_{i=0}^{4}(2\,i+1) &= 1+3+5+7+9. \end{cases}$$

1. *Determine the divided differences*

$$f[x_0],\ f[x_0,x_1],\ \ldots,\ f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4].$$

2. *Deduce the interpolating polynomial p of the function f at points x_i.*

3. *Prove by induction that*

$$\sum_{i=0}^{n}(2\,i+1) = p(n) \quad \text{for all } n\,\mathbb{N}.$$

Exercise 1.12 (***Horner scheme for Newton basis***)

Horner scheme relative to Newton basis requires only n multiplications for the evaluation of a polynomial of degree n, and is based on the following factorization.

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \delta_0\,N_0(x) + \delta_1\,N_1(x) + \delta_2\,N_2(x) + \delta_3\,N_3(x) \\ &= \delta_0\,.\,1 + \delta_1\,(x-x_0) + \delta_2\,(x-x_0)(x-x_1) + \delta_3\,(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &= \delta_0 + (x-x_0)\Big(\delta_1 + (x-x_1)\Big(\delta_2 + (x-x_2)(\delta_3)\Big)\Big) \end{aligned}$$

Complete the following algorithm that evaluate a polynomial expressed in Newton basis thanks the Horner scheme.

```
#initialization data :
#  x = a real number
#  d = (d[0],d[1],...,d[n]) = vector of coefficients = divided differences
#  xi = (xi[0],xi[1],...,xi[n]) = vector of interpolating points
p = ...                       # initialization
for ...
...
endfor
return p                      # p = p(x)
```

Solution

```
#initialization data :
#  x = a real number
#  d = (d[0],d[1],...,d[n]) = vector of coefficients = divided diff.
#  xi = (xi[0],xi[1],...,xi[n]) = vector of interpolating points
p = d[n]                          # initialization
for i = n-1 until 0 with step = -1 do
        p = d[i] + (x - xi[i]) * p
endfor
return p                          # p = p(x)
```

Exercise 1.13 (*Calculation of divided differences*)

1. *Write a Python function* `diffdiv(xi,yi)` *enabling the computation of divided differences with a one-dimensional vector* `delta`.
   `Input data :` `(xi,yi)`, $i = 0, 1, \dots, n$
   `Output data :` `delta` $= (\underbrace{\delta[x_0], \delta[x_0, x_1], \dots, \delta[x_0, x_1, \dots, x_n]}_{\text{divided differences}}, \underbrace{\dots, \delta[x_{n-1}, x_n], \delta[x_n]}_{\text{for later updates}})$

2. *Write a Python function* `updateDD(xi,yi,delta,xnew,ynew)` *enabling the update of the vector* `delta` *of divided differences in case of a new data* `(xnew,ynew)`.

Hints :*(a) Duplicate the vector* `yi` *into the vector* `delta` *by inserting a zero between each consecutive element* y_i *and* y_{i+1}*, so as to get a vector of size* $2n+1$*. (b) Take inspiration from the table below, where each calculated divided difference is stored at its line index.*

`delta`			
$y_0 = \delta[x_0]$			
0	$\leftarrow \delta[x_0, x_1]$		
$y_1 = \delta[x_1]$		$\leftarrow \delta[x_0, x_1, x_2]$	
0	$\leftarrow \delta[x_1, x_2]$		$\dots$
$y_2 = \delta[x_2]$		$\leftarrow \delta[x_1, x_2, x_3]$	
0	$\leftarrow \delta[x_2, x_3]$		$\dots$
$y_3 = \delta[x_3]$		$\leftarrow \delta[x_2, x_3, x_4]$	
0	$\leftarrow \delta[x_3, x_4]$		$\dots$
$\vdots$	$\vdots$		
0			$\dots$
$y_{n-1} = \delta[x_{n-1}]$		$\leftarrow \delta[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	
0	$\leftarrow \delta[x_{n-1}, x_n]$		
$y_n = \delta[x_n]$			

Exercise 1.14

Etant donnés $n+1$ *points distincts* $x_0, x_1, \dots, x_n$ *d'un intervalle* $[a, b]$ $(a < b)$ *ainsi qu'une fonction* $f \in C^n([a, b])$*, montrer que pour* $0 \le k \le n$*, il existe* $\xi_k \in]a, b[$*, tel que*

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi_k)}{k!}$$

où $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ *est la différence divisée d'ordre* k *associée aux données d'interpolation* $(x_i, y_i = f(x_i))$ *pour* $i = 0, 1, \dots, k$.

Indication. *On pourra s'inspirer des propositions 1.10 (Newton formula) et 1.12 (error bounds in Lagrange interpolation).*

Solution

La relation (1.3) de la proposition 1.10 à l'ordre k s'écrit pour $x = x_k$:

$$P_k(x_k, f) - P_{k-1}(x_k, f) = f(x_k) - P_{k-1}(x_k, f) = f[x_0, x_1, \dots, x_k] \prod_{i=0}^{i=k-1} (x_k - x_i) \qquad \text{(a)}$$

La première formule de la proposition 1.12 s'écrit pour $n = k - 1$ et $x = x_k$:

$$f(x_k) - P_{k-1}(x_k, f) = \frac{\prod_{i=0}^{i=k-1} (x_k - x_i)}{k!} f^{(k)}(\xi_k), \quad \xi_k \in]a, b[\qquad \text{(b)}$$

Il suffit alors de comparer les deux équations (a) et (b) pour obtenir le résultat.

Autre solution.
Pour k fixé, $0 \le k \le n$, l'erreur $E(x) = f(x) - P_k(x,f)$ est une fonction de classe C^k (en fait C^n) qui s'annule en $k+1$ points distincts : $E(x_i) = f(x_i) - P_k(x_i,f)$, $0 \le i \le k$. Ainsi, d'après le théorème de Rolle, la dérivée $E'(x)$ s'annule en k points distincts de l'intervalle $]a,b[$. En itérant, on obtient que la dérivée d'ordre k, $E^{(k)}(x)$ s'annule en un point de l'intervalle $]a,b[$, soit

$$E^{(k)}(\xi_k) \;=\; f^{(k)}(\xi_k) - P_k^{(k)}(\xi_k, f) \;=\; 0, \qquad \xi_k \in\,]a,b[.$$

Ainsi, $P_k(x,f)$ étant un polynôme de degré k dont le coefficient dominant est $f[x_0,x_1,\ldots,x_k]$, on obtient finalement

$$f^{(k)}(\xi_k) \;=\; k!\; f[x_0,x_1,\ldots,x_k], \qquad \xi_k \in\,]a,b[.$$

11.3 Error & convergence

Exercise 1.15

Error bounds.
Consider the function $f(x) = 2^x$ and $p_n(x)$ the interpolating polynomial of f at $n+1$ data points uniformly distributed on $[0,1]$. Find an upper bound for the error

$$|p_n(x) - 2^x|, \; x \in [0,1].$$

Exercise 1.16

Error bounds.
With which precision can we compute $\sin(1)$ using the polynomial interpolation based on the points : $x_0 = 0, x_1 = \pi/6, x_2 = \pi/4, x_3 = \pi/3, x_4 = \pi/2$.

Exercise 1.17

Error bounds.
With which precision can we compute $\sqrt{115}$ using the polynomial interpolation based on the points $x_0 = 100,\; x_1 = 121,\; x_2 = 144$.

Exercise 1.18

Error bounds.
Consider the function $f(x) = 2\sin(x) - 3\cos(x)$ defined on the interval $[-\pi, 3\pi]$ and $P_n(x,f)$ its interpolating polynomial at $n+1$ distinct points in $[-\pi, 3\pi]$.
Determine n such that $||f - P_n(.,f)|| \;<\; 10^{-5}$

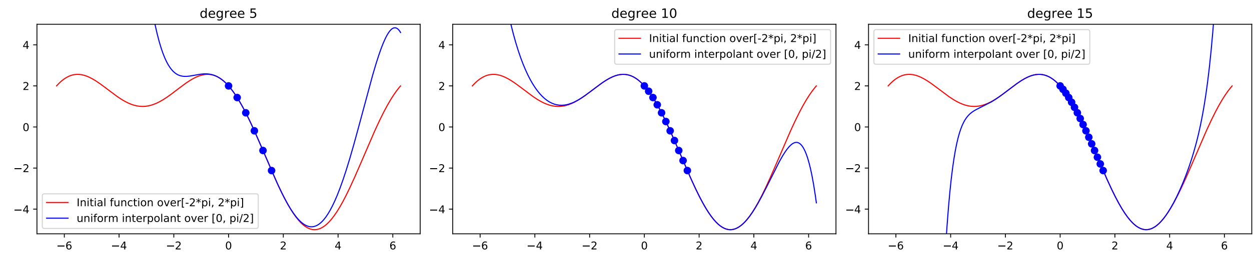
Exercise 1.19 (*DS octobre 2019*)

Consider the function

$$f(x) \;=\; 2\cos(x) - 3\sin(x/2)$$

defined on the interval $I = [-2\pi, 2\pi]$.

1. *The uniform interpolation of this function on the interval $[0,\pi/2]$ by polynomials of degree 5, 10 and 15 seems to converge to f on the whole interval $[-2\pi, 2\pi]$ (see the figures below). What do you think of this situation ?*



2. *We now consider Chebyshev interpolation of this function f on the interval $[-2\pi, 2\pi]$. What minimum degree should we consider to get an error strictly smaller than 10^{-2} ?*

Solution

1. On utilise la convergence forte. Pour tout $x \in [-2\pi, 2\pi]$, on a
$|f(x)| = |2\cos(x) - 3\sin(x/2)| \ \le\ 2+3 \ \le\ 5,$
$|f'(x)| = |-2\sin(x) - \frac{3}{2}\cos(x/2)| \ \le\ |2\sin(x)| + |\frac{3}{2}\cos(x/2)| \ \le\ 2+\frac{3}{2} \ \le\ 5,$
$|f''(x)| = |-2\cos(x) + \frac{3}{2^2}\sin(x/2)| \ \le\ |2\cos(x)| + |\frac{3}{2^2}\sin(x/2)| \ \le\ 2+\frac{3}{2^2} \ \le\ 5,$
$|f^{(3)}(x)| = |2\sin(x) + \frac{3}{2^3}\cos(x/2)| \ \le\ |2\sin(x)| + |\frac{3}{2^3}\cos(x/2)| \ \le\ 2+\frac{3}{2^3} \ \le\ 5,$
Finalement, une récurrence immédiate montre que $|f^{(k)}(x)| \le 5$ pour tout $x \in [-2\pi, 2\pi]$ et pour tout $k \in N$. Ce qui justifie la convergence sur l'intervalle $x \in [-2\pi, 2\pi]$ d'après la proposition 1.17 (strong convergence).

2. La formule d'erreur (1.5) de la proposition 1.12 donne
$$||f - P_n(.,f)|| \ \le\ \frac{||\Pi_{n+1}||}{(n+1)!}\,||f^{(n+1)}||$$
avec $||\Pi_{n+1}|| \ \le\ 2\,(\frac{b-a}{4})^{n+1}$ dans le cas de l'interpolation de Chebyshev et $||f^{(n+1)}|| \ \le\ 2+\dfrac{3}{2^{n+1}}$ d'après la question précédente, ce qui conduit à
$$||f - P_n(.,f)|| \ \le\ \frac{2\,(4\,\pi)^{n+1}}{4^{n+1}\,(n+1)!}\,(2+\frac{3}{2^{n+1}}) \ =\ \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}\,(4+\frac{3}{2^n}) \approx 0.0077 \quad \text{pour } \ n = 11$$

Exercise 1.20 (*Intégration approchée : méthode des trapèzes*)

On présente ici une méthode de calcul approché de l'intégrale d'une fonction sur un intervalle donné. On désigne par h un nombre réel strictement positif et f une fonction de $C^2([0,h])$.

1. *Déterminer p le polynôme d'interpolation de la fonction f aux points $x_0 = 0$ et $x_1 = h$.*

2. *Déterminer A et B tels que $\int_0^h p(x)\,dx = A\,f(0) + B\,f(h)$ et donner une interprétation du résultat.*

3. *En utilisant la formule d'erreur vue en cours, montrer que pour tout $x \in [0,h]$:*
$$|\ f(x) - P(x)\ | \le \frac{x(h-x)}{2}\max_{c\in[0,h]}|\ f''(c)\ |$$
et en déduire que $\left|\int_0^h f(x)dx - \frac{h}{2}[f(0)+f(h)]\right| \ \le\ \frac{h^3}{12}\max_{c\in[0,h]}|\ f''(c)\ |$.
On désigne maintenant par f une fonction deux fois continûment dérivable sur $[a,b]$. Soit n un entier strictement positif, $h = \frac{b-a}{n}$ et $x_i = a + ih$ pour $0 \le i \le n$.

4. *Montrer la* **formule des trapèzes** *:*

$$\Big| \int_a^b f(x)dx \; - \; \frac{b-a}{2n}\Big(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\Big)\Big| \; \leq \; \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{c\in[a,b]} \mid f''(c) \mid .$$

Exercise 1.21 (*Intégration approchée : méthode de Simpson*)

PARTIE I —
Soit g une fonction de $\mathcal{C}^4([-1,1])$. On désigne par p le polynôme d'interpolation de la fonction g aux points $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$.

1. *Montrer que*

$$\int_{-1}^{1} p(x)\, dx = \alpha\, g(-1) + \beta\, g(0) + \gamma\, g(1),$$

où α, β, γ sont trois constantes que l'on déterminera.

Note : le principe de la méthode présentée ici est d'approcher l'intégrale de la fonction g par l'intégrale de son polynôme d'interpolation p :

$$\int_{-1}^{1} g(x)\, dx \approx \int_{-1}^{1} p(x)\, dx = \alpha\, g(-1) + \beta\, g(0) + \gamma\, g(1).$$

2. *Montrer que pour tout polynôme q de degré inférieur ou égal à 3 on a :*

$$\int_{-1}^{1} q(x)\, dx = \alpha\, q(-1) + \beta\, q(0) + \gamma\, q(1).$$

3. *Montrer qu'il existe un unique polynôme s de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant :*

$$s(-1) = g(-1), \qquad s(0) = g(0), \qquad s(1) = g(1) \qquad \text{et} \qquad s'(0) = g'(0).$$

Soit $x \in [-1,1]$ différent de -1, 0 et 1. On considère la fonction ϕ suivante :

$$t \in [-1,1] \to \phi(t) = g(t) - s(t) - \frac{(t^2-1)\,t^2}{(x^2-1)\,x^2}\big(g(x) - s(x)\big).$$

4. *Pour $x \in]0,1[$, montrer qu'il existe $c_1 \in]-1,0[$, $c_2 \in]0,x[$, $c_3 \in]x,1[$ tels que :*

$$\phi'(c_1) = \phi'(c_2) = \phi'(c_3) = 0.$$

5. *Pour $x \in]-1,0[$, montrer qu'il existe $c_1 \in]-1,x[$, $c_2 \in]x,0[$, $c_3 \in]0,1[$ tels que :*

$$\phi'(c_1) = \phi'(c_2) = \phi'(c_3) = 0.$$

6. *Montrer que $\phi'(0) = 0$.*

7. *Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$ différent de -1, 0 et 1, il existe $\xi \in [-1,1]$ tel que la dérivée quatrième de ϕ en ξ soit nulle : $\phi^{(4)}(\xi) = 0$.*

8. *En déduire que pour tout $x \in [-1,1]$, on a :*

$$|g(x) - s(x)| \; \leq \; \frac{x^2(1-x^2)}{4!} \max_{c\,\in\,[-1,1]} |g^{(4)}(c)|.$$

9. *Montrer que*

$$\Big|\int_{-1}^{1} g(x)\,dx \;-\; \frac{1}{3}\big[g(-1)+4\,g(0)+g(1)\big]\Big| \le \frac{1}{90}\,\max_{c\in[-1,1]} |g^{(4)}(c)|.$$

PARTIE II —
On désigne maintenant par f une fonction de $\mathcal{C}^4([a,b])$, par n un entier strictement positif et on considère la subdivision régulière de $[a,b]$ définie par $x_i = a + i\,h$, $h = \frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, ..., n$.

10. *Montrer que sur tout intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ on a :*

$$\Big|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \;-\; \frac{h}{6}\big[f(x_i)+4\,f(x_i+\frac{h}{2})+f(x_{i+1})\big]\Big| \le \frac{h^5}{2880}\,\max_{c\in[x_i,x_{i+1}]} |f^{(4)}(c)|.$$

Indication : on se ramènera au cas de la partie I en posant sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$:

$$g(t) = f(x_i + \frac{h}{2} + t\,\frac{h}{2}).$$

On appelle Formule de Simpson, la formule :

$$I_S(f) = \frac{h}{6}\Big(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + \frac{h}{2})\Big).$$

11. *Montrer que :*

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx - I_S(f)\Big| \le \frac{(b-a)^5}{2880\,n^4}\,\max_{c\in[a,b]} |f^{(4)}(c)|.$$

12. *Montrer que l'approximation $I_S(f)$ tend vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ lorsque n tend vers $+\infty$.*

Exercise 1.22 (*Lebesgue constant*)

In this exercise we consider the uniform norm on $C^0[a,b]$. Given a sequence of $n+1$ distinct points x_i in the interval $[a,b]$ we consider the Lagrange interpolation operator

$$L_n \;:\quad f \in C^0[a,b] \quad\mapsto\quad L_n(f) := P_n(.,f) \in \mathbb{R}_n[x] \subset C^0[a,b]\,,$$

where $P_n(x,f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,L_i(x)$ is the interpolating polynomial of f at points x_i.

1. *Verify that L_n is a linear mapping.*
2. *Verify that $L_n(p) = p$ for any $p \in \mathbb{R}_n[x]$*
3. *Verify that L_n is a projector, i.e. $L_n \circ L_n = L_n$*
4. *Prove that*

$$\forall f \in C^0[a,b], \quad ||L_n(f)|| \le \Lambda_n\,||f||$$

where $\boxed{\Lambda_n = \max_{x\in[a,b]} \Big(\sum_{i=0}^{n} |L_i(x)|\Big)}$ is the Lebesgue constant on $[a,b]$ associated with the data points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

5. *Let $\Pi(f) \in \mathbb{R}_n[x]$ be the best polynomial approximation of f, i.e.*

$$||f - \Pi(f)|| = \min_{p\in\mathbb{R}_n[x]} ||f - p||$$

Prove that $||L_n(f) - \Pi(f)|| \le \Lambda_n\,||f - \Pi(f)||$

6. *Finally deduce that*

$$\big|\big|f - L_n(f)\big|\big| \;\leq\; (1+\Lambda_n)\,\big|\big|f - \Pi(f)\big|\big|$$

One can prove that Λ_n is the norm of the Lagrange interpolation operator L_n, i.e., $\Lambda_n = \big|\big|\big|L_n\big|\big|\big|$. The Lebesgue constant can be viewed as an "amplification" factor of the error in the interpolation process.

In the case of equidistant nodes, the Lebesgue constant grows exponentially :

$$\Lambda_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2^{n+1}}{\mathrm{e}\, n \ln n}$$

whereas in the case Chebyshev nodes, the Lebesgue constant grows only logarithmically :

$$\frac{2}{\pi}\ln(n+1) + a < \Lambda_n < \frac{2}{\pi}\ln(n+1) + 1 \qquad \textit{with } a = 0,9625\ldots$$

`https://en.wikipedia.org/wiki/Lebesgue_constant_(interpolation)`

Solution

The first three questions are clear.

4. $\forall\, x \in [a,b]$,

$$\big|L_n(f)(x)\big| = \big|P_n(x,f)\big| = \Big|\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,L_i(x)\Big| \;\leq\; \Big(\max_{x\in[a,b]}\big|f(x)\big|\Big)\,\sum_{i=0}^{n}\big|L_i(x)\big|$$

so that

$$\big|\big|L_n(f)\big|\big| \;\leq\; \underbrace{\Big(\max_{x\in[a,b]}\sum_{i=0}^{n}\big|L_i(x)\big|\Big)}_{\Lambda_n}\;\big|\big|f\big|\big|$$

5. Using questions 1 and 2 we have for any $f \in C^0[a,b]$
$L_n\big(f - \Pi(f)\big) = L_n(f) - L_n\big(\Pi(f)\big) = L_n(f) - \Pi(f)$

so that : $\big|\big|\underbrace{L_n\big(f-\Pi(f)\big)}_{L_n(f)-\Pi(f)}\big|\big| \;\leq\; \Lambda_n\,\big|\big|f - \Pi(f)\big|\big|$ by question 4

6. $\big|\big|f - L_n(f)\big|\big| \;\leq\; \big|\big|f - \Pi(f)\big|\big| + \big|\big|\Pi(f) - L_n(f)\big|\big| \;\leq\; (1+\Lambda_n)\,\big|\big|f - \Pi(f)\big|\big|$

TD : interpolation de Hermite – Corrigé

Exercise 1 (*Cubic Hermite interpolation over 2 points*)

We consider the simple case of two interpolation data points α and β $(\alpha < \beta)$. Precisely, given the two Hermite data $(\alpha, y_\alpha, y'_\alpha)$ and $(\beta, y_\beta, y'_\beta)$, we are looking for a cubic polynomial $p(x)$ that satisfies

$$p(\alpha) = y_\alpha\,, \quad p'(\alpha) = y'_\alpha\,, \quad p'(\beta) = y'_\beta\,, \quad p(\beta) = y_\beta.$$

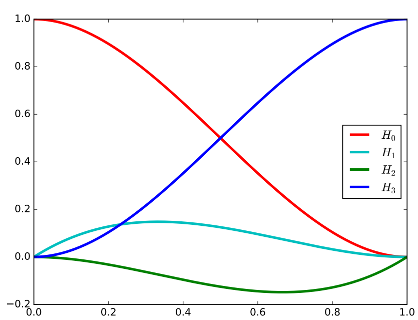
We will reduce this Hermite interpolation process to a standard Hermite process relative to the two points 0 and 1.

Prove that the following polynomial $p(x)$ is the unique solution to this cubic Hermite interpolation problem.

$$p(x) = y_\alpha\, H_0\Big(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\Big) + y'_\alpha\,(\beta-\alpha)\, H_1\Big(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\Big) + y'_\beta\,(\beta-\alpha)\, H_2\Big(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\Big) + y_\beta\, H_3\Big(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\Big) \tag{1}$$

where H_0, H_1, H_2, H_3 are four cubic polynomials forming the standard cubic Hermite basis over $[0, 1]$ and characterized by the following table.

	H_0	H_1	H_2	H_3
$H_i(0)$	1	0	0	0
$H'_i(0)$	0	1	0	0
$H'_i(1)$	0	0	1	0
$H_i(1)$	0	0	0	1



$$H_0(t) = 1 - 3\,t^2 + 2\,t^3$$
$$H_1(t) = t - 2\,t^2 + t^3$$
$$H_2(t) = -t^2 + t^3$$
$$H_3(t) = 3\,t^2 - 2\,t^3$$

Solution

Il s'agit d'une vérification directe.
Pour l'unicité il suffit de vérifier que la matrice 4×4 des contraintes dans une base quelconque est non dégénérée [pas très intéressant, on admettra].

Exercise 2 (*Lemma : second derivatives at extremites*)

Let $p(x)$ be the cubic Hermite interpolating polynomial relative to data $\big(\alpha, y_\alpha, y'_\alpha\big)$ and $\big(\beta, y_\beta, y'_\beta\big)$ and let $h = \beta - \alpha$. Then, the second derivatives of $p(x)$ at points α and β can be expressed with respect to the interpolation data as follows.

$$\boxed{p''(\alpha) = \frac{2}{h^2}\Big(3\,y_\beta - 3\,y_\alpha - 2\,h\,y'_\alpha - h\,y'_\beta\Big) \quad \text{and} \quad p''(\beta) = \frac{2}{h^2}\Big(3\,y_\alpha - 3\,y_\beta + 2\,h\,y'_\beta + h\,y'_\alpha\Big). \quad (2)}$$

Solution

Notice that the two formulas are identical up to a data permutation and by replacing h with $-h$. So we just need to prove the first one. Then, since the Hermite interpolating polynomial $p(x)$ and its derivative $p'(x)$ are respectively of degree 3 and 2, they coincide with their Taylor expansion respectively of order 3 and 2 at point α.

$$\begin{aligned} p(x) &= y_\alpha + (x-\alpha)\, y'_\alpha + \frac{(x-\alpha)^2}{2}\, p''(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^3}{6}\, p'''(\alpha), \\ p'(x) &= y'_\alpha + (x-\alpha)\, p''(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2}\, p'''(\alpha). \end{aligned}$$

For $x = \beta$, we get

$$p(\beta) = y_\alpha + h\, y'_\alpha + \frac{h^2}{2}\, p''(\alpha) + \frac{h^3}{6}\, p'''(\alpha) \qquad \text{and} \qquad p'(\beta) = y'_\alpha + h\, p''(\alpha) + \frac{h^2}{2}\, p'''(\alpha),$$

from which we deduce the result after eliminating the term $p'''(\alpha)$:

$$p''(\alpha) = \frac{2}{h^2}\big(3\, y_\beta - 3\, y_\alpha - 2\, h\, y'_\alpha - h\, y'_\beta\big).$$

Exercise 3 (*Error bound for cubic Hermite interpolation over 2 points*)

We propose to estimate the error associated with the cubic Hermite interpolation over two points in the form of a problem.

Let $f \in C^4[\alpha,\beta]$ and let $p(x) = P_H(x,f)$ be the cubic Hermite interpolating polynomial of the function f at points α and β.
Considering a fixed value x in $]\alpha,\beta[$, we introduce the function ϕ defined by

$$u \in [\alpha,\beta] \quad \longmapsto \quad \phi(u) = f(u) - p(u) - \frac{(u-\alpha)^2\,(u-\beta)^2}{(x-\alpha)^2\,(x-\beta)^2}\,\Big(f(x) - p(x)\Big)\,.$$

1. *Prove that ϕ cancels at points α, β and x. Deduce that ϕ' cancels at two distinct points in $]\alpha,\beta[$.*

2. *Prove that $\phi'(\alpha) = \phi'(\beta) = 0$.*

3. *Deduce that there exists $\zeta_x \in]\alpha,\beta[$ such that $\phi^{(4)}(\zeta_x) = 0$.*

4. *Prove that*
$$f(x) - p(x) = \frac{(x-\alpha)^2\,(x-\beta)^2}{24}\, f^{(4)}(\zeta_x)\,.$$

5. *Prove that*
$$|(x-\alpha)(x-\beta)| \le \frac{(\beta-\alpha)^2}{4}$$

6. *Finally, deduce that for all $x \in [\alpha,\beta]$ we have*
$$\big|f(x) - p(x)\big| \le \frac{(\beta-\alpha)^4}{384} \max_{\zeta\in[\alpha,\beta]} \big|f^{(4)}(\zeta)\big|\,,$$
from which we get the upper bound for the error
$$\Big|\Big|f - P_H(.,f)\Big|\Big| \le \frac{(\beta-\alpha)^4}{384}\, \Big|\Big|f^{(4)}\Big|\Big|.$$

Solution

Solution from a former exam with a and b instead of α and β

Remarquons que ϕ est de classe C^4 sur $[a,b]$. En effet, ϕ est définie à partir de f qui est C^4 et de fonctions polynomiales.

1. Un calcul direct donne
   $\phi(a) = f(a) - p(a) - 0 = 0$
   $\phi(b) = f(b) - p(b) - 0 = 0$
   $\phi(x) = f(x) - p(x) - 1\,.\big(f(x) - p(x)\big) = 0$

   Ainsi, puisque ϕ est de classe (au moins) C^1 sur $[a,b]$ et que $a < x < b$, on déduit du théorème de Rolle que ϕ' s'annule en deux points distincts ξ_1 et ξ_2 : $a < \xi_1 < x < \xi_2 < b$.

2. On commence par calculer $\phi'(t)$:

   $$\phi'(t) = f'(t) - p'(t) - \frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^2(x-b)^2}\left[2(t-a)(t-b)^2 + 2(t-a)^2(t-b)\right].$$

   De sorte que
   $\phi'(a) = f'(a) - p'(a) - 0 = 0,$
   $\phi'(b) = f'(b) - p'(b) - 0 = 0.$

3. Finalement, l'application ϕ' s'annule en a, ξ_1, ξ_2, b, soit en 4 points distincts de l'intervalle $[a,b]$. Par application répétée du théorème de Rolle, on déduit successivement que :
   ϕ'' s'annule en 3 points distincts de l'intervalle $]a,b[$,
   $\phi^{(3)}$ s'annule en 2 points distincts de l'intervalle $]a,b[$,
   $\phi^{(4)}$ s'annule en 1 point $\zeta \in]a,b[$.

4. On commence par calculer $\phi^{(4)}(t)$.

   $$\phi^{(4)}(t) = f^{(4)}(t) - p^{(4)}(t) - \frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^2(x-b)^2}\,4! = f^{(4)}(t) - \frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^2(x-b)^2}\,4!$$

   car $p^{(4)}(t)$ est identiquement nul. Ensuite, pour $t = \zeta$, on obtient

   $$\phi^{(4)}(\zeta) \;=\; f^{(4)}(\zeta) - \frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^2(x-b)^2}\,4! \;=\; 0$$

   ce qui conduit à

   $$f^{(4)}(\zeta) = \frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^2(x-b)^2}\,24 \quad\Leftrightarrow\quad f(x)-p(x) = \frac{(x-a)^2(x-b)^2}{24}\,f^{(4)}(\zeta)\,.$$

5. Il s'agit ici juste d'une étude de fonction du second degré dont le maximum (en valeur absolue) sur $[a,b]$ est atteint en $\frac{a+b}{2}$ et vaut $\frac{(b-a)^2}{4}$.

6. Pour cette dernière question, il suffit de majorer $(x-a)^2(x-b)^2$ par $\left(\frac{(b-a)^2}{4}\right)^2$ ce qui conduit au résultat

   $$|f(x) - p(x)| \le \frac{(b-a)^4}{384}\,\max_{a\le\zeta\le b}|f^{(4)}(\zeta)|\,, \qquad \forall x \in\, [a,b].$$

Exercise 4 (***Hermite interpolation of order n at one point***)

Let $n \in \mathbb{N}$, a a fixed real number as well as $n+1$ real numbers

$$y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_n.$$

Prove that there exists a unique polynomial $p(x)$ of degree n such that

$$p^{(k)}(a) = y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Solution

L'unique solution est le développement de Taylor

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \, \frac{(x-a)^k}{k!}$$

Exercise 5 (***An instructive example***)

Let y_0, y_1', y_2 three real numbers. Determine the set of polynomials $p(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ satisfying the constraints

$$p(0) = y_0, \quad p'(1) = y_1', \quad p(2) = y_2\,,$$

according values of parameters y_0, y_1' and y_2.

Solution

Nous avons 3 paramètres libres et 3 contraintes, ce qui pourrait nous inciter à penser qu'il existe une unique solution...

Ecrivons ces contraintes

$$\left\{\begin{array}{lll} p(0) & = a_0 & = y_0 \\ p'(1) & = \quad a_1 + 2a_2 & = y_1' \\ p(2) & = a_0 + 2a_1 + 4a_2 & = y_2 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = y_0 \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{ll} a_1 + 2a_2 & = y_1' \\ 2a_1 + 4a_2 & = y_2 - y_0 \end{array}\right.$$

Une réduction de Gauss appliquée au dernier système conduit à la contrainte $y_2 - y_0 - 2y_1' = 0$, de sorte que nous avons 2 cas :

1. si $y_1' \neq \frac{y_2 - y_0}{2}$, le problème n'admet aucune solution,
2. si $y_1' = \dfrac{y_2 - y_0}{2}$, le problème admet une infinité de solutions données par

$$\left\{\begin{array}{lll} a_0 & = y_0 & \\ a_1 & = y_1' - 2a_2 & = \dfrac{y_2 - y_0}{2} - 2a_2 \\ a_2 & & \text{quelconque dans } \mathbb{R} \end{array}\right.$$

de sorte que les solutions ne dépendent que de y_0 et y_2 (2 des trois contraintes y_0, y_1', y_2)

Il s'agit d'une propriété des paraboles : la tangente au point d'abscisse $\frac{x_0 + x_1}{2}$ est parallèle à la droite joignant les points d'abscisse x_0 et x_1.

Exercise 6 (*From Lagrange to Hermite*)

Let $h \in]0,1[$.

1. *Write the quadratic Lagrange polynomials relative to data points* $x_0 = 0,\ x_1 = h,\ x_2 = 1$.

2. *Given real values* y_0, α, y_2, *determine the unique polynomial* $p(x)$ *of degree less than or equal 2 satisfying the constraints*

$$p(x_0) = y_0,\ p(x_1) = y_0 + \alpha h,\ p(x_2) = y_2.$$

3. *Write the previous polynomial* $p(x)$ *on the form*

$$p(x) = y_0\, p_0^h(x) + \alpha\, p_1^h(x) + y_2\, p_2^h(x),$$

   and specify the polynomials $p_0^h(x),\ p_1^h(x),\ p_2^h(x)$.

4. *Prove that polynomials* $p_0^h(x),\ p_1^h(x),\ p_2^h(x)$ *converge, when* h *tends to* 0, *to three polynomials* $p_0(x),\ p_1(x),\ p_2(x)$ *which satisfy*

$$\begin{array}{rclrclrcl} p_0(0) &=& 1, & {p_0}'(0) &=& 0, & p_0(1) &=& 0,\\ p_1(0) &=& 0, & {p_1}'(0) &=& 1, & p_1(1) &=& 0,\\ p_2(0) &=& 0, & {p_2}'(0) &=& 0, & p_2(1) &=& 1. \end{array}$$

5. *Comment the result of the previous question and develop a similar process leading to the standard cubic Hermite basis on* $[0,1]$.

Solution

1. $L_0(x) = \frac{(x-h)(x-1)}{h}, \quad L_1(x) = \frac{x(x-1)}{h(h-1)}, \quad L_2(x) = \frac{x(x-h)}{1-h}$

2. $p(x) = y_0\ \frac{(x-h)(x-1)}{h} + (y_0 + \alpha h)\ \frac{x(x-1)}{h(h-1)} + y_2\ \frac{x(x-h)}{1-h}$

3. $p(x) = y_0 \underbrace{\left(\dfrac{(x-h)(x-1)}{h} + \dfrac{x(x-1)}{h(h-1)}\right)}_{p_0^h(x) = \frac{(x+1-h)(x-1)}{h-1}} + \alpha \underbrace{\dfrac{x(x-1)}{h-1}}_{p_1^h(x)} + y_2 \underbrace{\dfrac{x(x-h)}{1-h}}_{p_2^h(x)}$

4. $\lim_{h\to 0} p_0^h(x) = 1 - x^2 = p_0(x)$

   $\lim_{h\to 0} p_1^h(x) = x - x^2 = p_1(x)$

   $\lim_{h\to 0} p_2^h(x) = x^2 = p_2(x)$

   And these 3 polynomials satisfy the given relations.

5. We note that for any $h > 0$ the point $(h, y_0 + \alpha h)$ remains on a constant line passing through the point $(0, y_0)$ with slope α, so that this process of interpolation tends towards Hermite interpolation at point $x_0 = 0$ with Hermite data $(x_0, y_0, y_0' = \alpha)$.

Exercise 7 (***Interpolation et erreur***)

On souhaite calculer une approximation de $\sqrt{11}$ *:*
1) soit à l'aide de l'interpolation cubique de Lagrange basée sur les points $x_0 = 4,\ x_1 = 9,\ x_2 = 16,\ x_3 = 25$ *,*
2) soit à l'aide de l'interpolation cubique de Hermite basée sur deux points convenablement choisis.

Quelle méthode doit-on choisir si l'on souhaite une erreur strictement inférieure à 10^{-2} *?*
Les erreurs pour chaque méthode seront évaluées à l'aide du cours et majorées aussi finement que possible. On demande 2 chiffres significatifs.

Solution

• Notons $P_L(x)$ le polynôme d'interpolation cubique de Lagrange de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [a,b] = [4,25]$, aux 4 points d'abscisses x_i donnés ci-dessus. La fonction f est indéfiniment dérivable de sorte que l'on peut appliquer la formule d'erreur du cours : $\forall\, x \in [a,b]$, on a

$$|f(x) - P_L(x)| \leq \frac{|\prod_{i=0}^{i=3}(x-x_i)|}{4\,!} \max_{a\leq\xi\leq b} \left|f^{(4)}(\xi)\right| = \frac{|(x-4)(x-9)(x-16)(x-25)|}{24} \underbrace{\max_{4\leq\xi\leq 25} \left|\frac{15}{16\sqrt{\xi^7}}\right|}_{=\frac{15}{2^{11}}}$$

Soit :

$$\left|\sqrt{11} - P_L(11)\right| \leq \frac{7\times 2\times 5\times 14}{24} \times \frac{15}{2^{11}} = \frac{35^2}{2^{12}} \approx 0.299$$

• Pour l'interpolation de Hermite, il faut bien évidemment encadrer "au plus près" la valeur $x = 11$ entre deux valeurs connues de la racine carrée. On choisit donc $\alpha = 9$ et $\beta = 16$.
Notons $P_H(x)$ le polynôme d'interpolation cubique de Hermite de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [\alpha,\beta]$, basé sur les deux points d'abscisses α et β. La formule d'erreur du cours donne : $\forall\, x \in [\alpha,\beta]$, on a

$$|f(x) - P_H(x)| \leq \frac{(\beta-\alpha)^4}{384} \max_{\alpha\leq\xi\leq\beta} |f^{(4)}(\xi)| = \frac{(16-9)^4}{384} \underbrace{\max_{9\leq\xi\leq 16} \left|\frac{15}{16\sqrt{\xi^7}}\right|}_{=\frac{5}{16\times 3^6}}$$

Soit :

$$\left|\sqrt{11} - P_H(11)\right| \leq \frac{7^4}{384}\,\frac{5}{16\times 3^6} \approx 0.0027$$

• Ces formules d'erreurs nous incitent donc à choisir l'interpolation de Hermite.

Modélisation Géométrique

TD : interpolation Spline – Corrigé

Exercise 1 (*An n-dimensional vector space*)

Soit $[a, b]$ un intervalle non vide, E un sous espace vectoriel de $C^0([a, b])$ ainsi qu'une subdivision (x_i) strictement croissante de l'intervalle $[a, b]$:

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$$

On considère par ailleurs n nombres réels quelconques :

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

Est-il vrai que si $\dim E \geq n$, il est toujours possible de trouver une fonction $f \in E$ vérifiant

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Solution

La réponse est non.

On peut construire un contre-exemple en considérant par exemple l'ensemble des fonctions chapeaux associé à m $(m \geq n)$ valeurs u_j distinctes strictement contenues dans l'intervalle $]a, x_1[$. Ces fonctions chapeaux sont linéairement indépendantes, continues sur $[a, b]$, nulles sur $[x_1, b]$, elles engendrent un espace vectoriel E de dimension $m \geq n$. Et aucun élément de E ne peut satisfaire les contraintes d'interpolation proposées si l'un des y_i est non nul.

Exercise 2 (*Periodic C2 cubic splines*)

Etant donnée une suite de n points x_i $(n \geq 2)$ tels que

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

on considère l'ensemble E des fonctions de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, périodiques, de période $T = b - a$, dont la restriction à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est un polynôme de degré 3.

On considère par ailleurs l'espace $\Pi_2^3 = \Pi_2^3(x_1, ..., x_n)$ des splines cubiques C^2 associées à cette famille de noeuds x_i. On rappelle que Π_2^3 est l'ensemble des fonctions de classe C^2 sur $[a, b]$ dont la restriction à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, ..., n-1$ est un polynôme de degré 3.

1. *Vérifier que E est un espace vectoriel.*
2. *On considère le cas $n = 2$ avec $a = 0$ et $b = 1$. Expliciter l'espace E. Donner sa dimension et une base.*
3. *On se place désormais dans le cas général avec $n > 2$. Pour un élément $f \in E$, on note $\hat{f}$ sa restriction à l'intervalle $[a, b]$ et on considère l'ensemble $\hat{E} = \{\hat{f}\ ,\ f \in E\}$.*

   Vérifier que $\hat{E}$ est un sous espace vectoriel de Π_2^3.
4. *Soit $s \in \Pi_2^3$. Ecrire les conditions nécessaires et suffisantes pour que $s \in \hat{E}$.*

5. *On rappelle que tout élément s de Π_2^3 s'écrit de manière unique sous la forme*

$$s(x) = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i \, x^i + \sum_{i=2}^{n-1} \beta_i \, (x - x_i)_+^3 \,, \quad x \in [a, b].$$

a) Montrer que $\hat{E}$ est le noyau d'une application linéaire Φ de Π_2^3 dans $\mathbb{R}^3$.

b) En identifiant Π_2^3 avec $\mathbb{R}^{n+2}$, écrire la matrice de $\Phi : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^3$, déterminer son rang et en déduire la dimension de $\hat{E}$.

Interpolation. – *On considère maintenant une suite de n réels $y_1, y_2, ..., y_n$ et on souhaite interpoler les données (x_i, y_i), $i = 1, ..., n$ par une fonction de $\hat{E}$. Autrement dit, on cherche $\hat{f} \in \hat{E}$ tel que*

$$\hat{f}(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

6. *Les données y_i peuvent-elles toutes être choisies indépendamment ?*

   On suppose désormais que les données y_i sont cohérentes au sens de la question précédente et que les noeuds x_i sont équirépartis dans $[a, b]$, autrement dit que $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 1, ..., n-1$ avec $h = (b-a)/(n-1)$. On propose de construire l'interpolant $\hat{f}$ selon une méthode semblable à celle des splines naturelles.

7. *Quelles sont les inconnues à déterminer.*

8. *Ecrire le système linéaire permettant de déterminer ces inconnues.*

Solution

1. E est un sous espace vectoriel de $C^2(\mathbb{R})$. En effet : 1) E est non vide car il contient la fonction nulle, 2) toute combinaison linéaire de polynômes cubiques est un polynôme cubique, 3) toute combinaison linéaire de fonctions T périodiques est T périodique.

2. Ici $n = 2$ avec $a = 0$ et $b = 1$. Pour déterminer E, il suffit de le caractériser sur l'intervalle $[x_1, x_2] = [a, b]$. Pour $f \in E$, sa restriction $\hat{f}$ à $[a, b]$ est donc un unique polynôme de degré 3, soit $\hat{f}(x) = \alpha + \beta \, x + \gamma \, x^2 + \delta \, x^3$. Ainsi, $f \in E$ si et seulement si $\hat{f}$ satisfait les conditions de raccord C^2 suivantes en $a = 0$ et $b = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \hat{f}(0) & = & \hat{f}(1) \\ \hat{f}'(0) & = & \hat{f}'(1) \\ \hat{f}''(0) & = & \hat{f}''(1) \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcr} \alpha & = & \alpha + \beta + \gamma + \delta \\ \beta & = & \beta + 2\,\gamma + 3\,\delta \\ 2\gamma & = & 2\,\gamma + 6\,\delta \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha & \text{quelconque dans } \mathbb{R} \\ \beta & = 0 \\ \gamma & = 0 \\ \delta & = 0 \end{array} \right.$$

   de sorte que E est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$, $\dim E = 1$ et $E = \text{vect}\{\mathbf{1}\}$, où $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1.

3. Puisque E est un espace vectoriel, l'ensemble $\hat{E}$ des restrictions de ses éléments à $[a, b]$ est un sous espace vectoriel de $C^2([a, b])$. Par ailleurs, soit $\hat{f} \in \hat{E}$. Sa restriction à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est un polynôme de degré 3 et $\hat{f}$ est de classe C^2 sur $[a, b]$, de sorte que $\hat{f} \in \Pi_2^3$ et donc $\hat{E} \subset \Pi_2^3$.

4. Soit $s \in \Pi_2^3$. Alors $s \in \hat{E}$ si et seulement si s est la restriction d'une fonction de E, c'est-à-dire si et seulement si s est "périodisable", c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{cases} s(a) &= s(b) \\ s'(a) &= s'(b) \\ s''(a) &= s''(b) \end{cases} .$$

5. a) On considère l'application

$$\begin{array}{llll} \Phi: & \Pi_2^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & s & \mapsto & \big(s(b)-s(a), s'(b)-s'(a), s''(b)-s''(a)\big) \end{array}$$

L'application Φ est clairement linéaire et $\ker\Phi = \hat{E}$ d'après la question précédente.

b) Soit $s \in \Pi_2^3$. Pour $x \in [a,b]$ on a

$$\begin{array}{lcr} s(x) &=& \alpha_0 + \alpha_1\, x + \alpha_2\, x^2 + \alpha_3\, x^3 + \sum_{i=2}^{n-1} \beta_i\,(x-x_i)_+^3 \\ s'(x) &=& \alpha_1 + 2\,\alpha_2\, x + 3\,\alpha_3\, x^2 + \sum_{i=2}^{n-1} 3\,\beta_i\,(x-x_i)_+^2 \\ s''(x) &=& 2\,\alpha_2 + 6\,\alpha_3\, x + \sum_{i=2}^{n-1} 6\,\beta_i\,(x-x_i)_+ \end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{lcr} s(b)-s(a) &=& \alpha_1\,(b-a) + \alpha_2\,(b^2-a^2) + \alpha_3\,(b^3-a^3) + \sum_{i=2}^{n-1} \beta_i\,(b-x_i)_+^3 \\ s'(b)-s'(a) &=& 2\,\alpha_2\,(b-a) + 3\,\alpha_3\,(b^2-a^2) + \sum_{i=2}^{n-1} 3\,\beta_i\,(b-x_i)_+^2 \\ s''(b)-s''(a) &=& 6\,\alpha_3\,(b-a) + \sum_{i=2}^{n-1} 6\,\beta_i\,(b-x_i)_+ \end{array}$$

On en déduit la matrice (relativement aux bases canoniques) de l'application linéaire $\varphi = \Phi \circ F : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^3$, $(\alpha_0,\ldots,\alpha_3,\beta_2,\ldots,\beta_{n-1}) \mapsto \big(s(b)-s(a), s'(b)-s'(a), s''(b)-s''(a)$

$$\mathrm{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 & (b-x_2)^3 & \cdots & (b-x_{n-1})^3 \\ 0 & 0 & 2(b-a) & 3(b^2-a^2) & 3(b-x_2)^2 & \cdots & 3(b-x_{n-1})^2 \\ 0 & 0 & 0 & 6(b-a) & 6(b-x_2) & \cdots & 6(b-x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Ainsi, par extraction des colonnes 2, 3 et 4 on obtient une sous matrice (3×3) inversible car $b-a \neq 0$, de sorte que $\mathrm{rang}(\varphi) = 3$ et $\dim(\ker\varphi) = (n+2)-3 = n-1$. Finalement, puisque F est un isomorphisme, on a $\ker\Phi = F(\ker\varphi)$ et donc $\dim(\ker\Phi) = \dim(\hat{E}) = n-1$.

Interpolation. –

6. $\to$ La périodicité $\hat{f}(a) = \hat{f}(b)$ impose $y_n = y_1$.

7. La méthode consiste à déterminer les restrictions cubiques $\hat{f}_i = \hat{f}_{[x_i,x_{i+1}]}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ dans la base de Hermite associée à l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Les inconnues sont donc les dérivées y_i' aux noeuds x_i.
$\to$ La périodicité $\hat{f}'(a) = \hat{f}'(b)$ impose $y_n' = y_1'$ de sorte que les inconnues sont uniquement les dérivées $y_1', y_2', \ldots, y_{n-1}'$.

8. On écrit tout d'abord les conditions de raccord C^2 (identiques à celles traitées dans le cours pour les splines cubiques) en chaque noeud intérieur.

$$\hat{f}_{i-1}''(x_i) = \hat{f}_i''(x_i)\,, \quad i = 2, \ldots, n-1.$$

Ce qui conduit aux conditions

$$\boxed{h_i\, y'_{i-1} + 2\,(h_{i-1}+h_i)\, y'_i + h_{i-1}\, y'_{i+1} = 3\left(\tfrac{h_{i-1}}{h_i}\, y_{i+1} + \tfrac{h_i^2-h_{i-1}^2}{h_i h_{i-1}}\, y_i - \tfrac{h_i}{h_{i-1}}\, y_{i-1}\right),\ i=2,\ldots,n-1.}$$

avec $y_n = y_1$ et $y'_n = y'_1$

$\rightarrow$ La périodicité $\hat{f}''(a) = \hat{f}''(b)$ s'écrit

$\hat{f}_1''(x_1) = \hat{f}_{n-1}''(x_n)$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{h_1^2}\left(3\,y_2 - 3\,y_1 - 2\,h_1\,y'_1 - h_1\,y'_2\right) = \frac{2}{h_{n-1}^2}\left(3\,y_{n-1} - 3\,y_n + 2\,h_{n-1}\,y'_n + h_{n-1}\,y'_{n-1}\right)$$

et conduit à

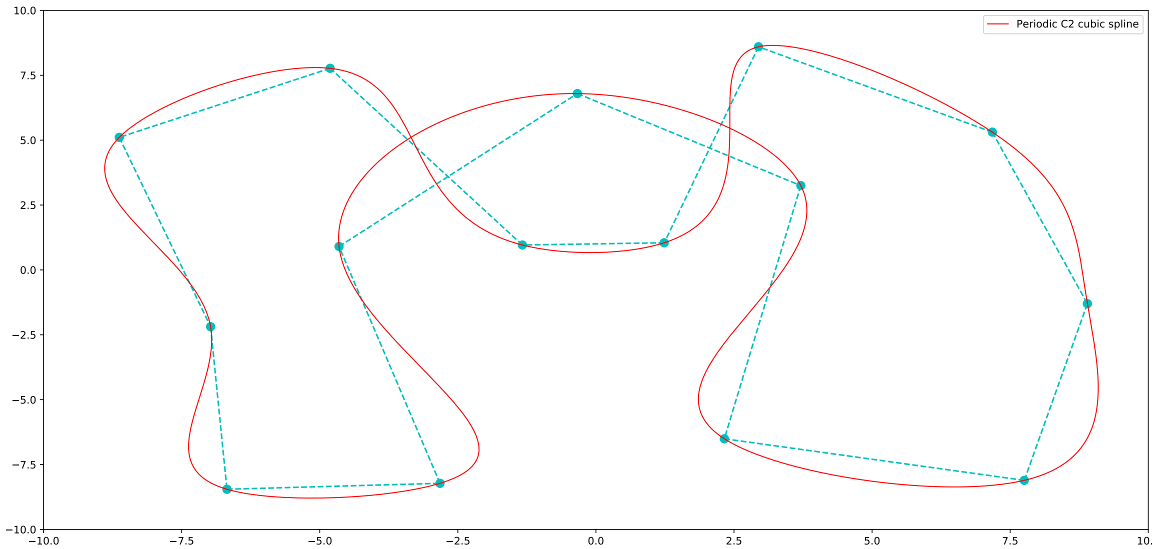
$$\boxed{2(h_1+h_{n-1})\,y'_1 + h_{n-1}\,y'_2 + h_1\,y'_{n-1} = 3\left(\frac{h_{n-1}}{h_1}(y_2-y_1) + \frac{h_1}{h_{n-1}}(y_1-y_{n-1})\right)}$$

avec $y_n = y_1$ et $y'_n = y'_1$.

Finalement, les inconnues $y'_1, \ldots, y'_{n-1}$ sont obtenues par résolution du système linéaire suivant.

$$\begin{pmatrix}
2(h_{n-1}+h_1) & h_{n-1} & 0 & & \cdots & & 0 & h_1 \\
h_2 & 2(h_1+h_2) & h_1 & 0 & & & & 0 \\
0 & h_3 & 2(h_2+h_3) & h_2 & 0 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & & h_i & 2(h_{i-1}+h_i) & h_{i-1} & & \\
 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & & & & & h_{n-2} & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-3} \\
h_{n-2} & 0 & \cdots & & & 0 & h_{n-1} & 2(h_{n-2}+h_{n-1})
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \\ \vdots \\ y'_{i-1} \\ y'_i \\ y'_{i+1} \\ \vdots \\ y'_{n-3} \\ y'_{n-2} \\ y'_{n-1} \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$= 3 \begin{pmatrix}
\frac{h_{n-1}}{h_1}(y_2-y_1) + \frac{h_1}{h_{n-1}}(y_1-y_{n-1}) \\
\frac{h_1}{h_2}(y_3-y_2) + \frac{h_2}{h_1}(y_2-y_1) \\
\vdots \\
\frac{h_{i-1}}{h_i}(y_{i+1}-y_i) + \frac{h_i}{h_{i-1}}(y_i-y_{i-1}) \\
\vdots \\
\frac{h_{n-2}}{h_{n-1}}(y_n-y_{n-1}) + \frac{h_{n-1}}{h_{n-2}}(y_{n-1}-y_{n-2})
\end{pmatrix}.$$



Exercise 3 (*Energie*)

Les polynômes demandés seront exprimés soit dans la base des momômes soit à l'aide de la base cubique de Hermite sur $[0,1]$ *(sans aucun développement).*
On note Ω_2 *l'ensemble des fonctions réelles définies sur* $[a,b]$*, de classe* C^2*, interpolant les données* (x_i, y_i) *pour* $i = 1,2,3$ *définies par*

$$\begin{array}{rclrclrcl} a = x_1 & = & -1, & x_2 & = & 0, & x_3 & = & 1 = b, \\ y_1 & = & 0, & y_2 & = & 1, & y_3 & = & -2. \end{array}$$

1. *Déterminer* $h \in \Omega_2$ *qui réalise le minimum suivant*

$$\int_a^b h''(x)^2 \,\mathrm{d}x \;=\; \min_{f\in\Omega_2} \left(\int_a^b f''(x)^2 \,\mathrm{d}x \right)$$

2. *Déterminer les dérivées premières et secondes de cette fonction* h *en* x_1 *et* x_3

Solution

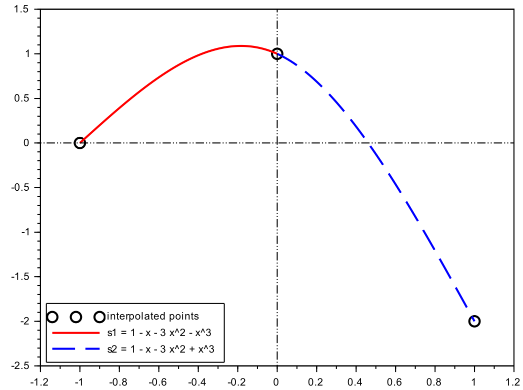
1. Nous savons par le cours que la solution de ce problème de minimisation est la spline (cubique C^2) naturelle h interpolant les données (x_i, y_i) pour $i = 1,2,3$.
   Afin de déterminer cette spline naturelle, il nous faut tout d'abord résoudre le système suivant correspondant au cas de l'interpolation spline uniforme avec un pas égal à 1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = \frac{3}{1} \begin{pmatrix} y_2 - y_1 \\ y_3 - y_1 \\ y_3 - y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y'_1 = 2 \\ y'_2 = -1 \\ y'_3 = -4 \end{cases}$$

   La spline naturelle h est un polynôme de degré 3 sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, soit avec les notations usuelles $h_1 = h_{[x_1,x_2]}$ et $h_2 = h_{[x_2,x_3]}$:

$$\begin{array}{lll} \text{sur } [x_1,x_2] = [-1,0] : & h_1(x) & = y_1\, H_0(x+1) + y'_1\, H_1(x+1) + y'_2\, H_2(x+1) + y_2\, H_3(x+1) \\ & & = 2\, H_1(x+1) - H_2(x+1) + H_3(x+1) \\ \text{sur } [x_2,x_3] = [0,1] : & h_2(x) & = y_2\, H_0(x) + y'_2\, H_1(x) + y'_3\, H_2(x) + y_3\, H_3(x) \\ & & = H_0(x) - H_1(x) - 4\, H_2(x) - 2\, H_3(x) \end{array}$$

   Donnons pour information le tracé de cette spline naturelle $h(x)$



2. Aucun nouveau calcul à faire ici.
   Les dérivées premières ont déjà été déterminées en question a) et par définition la spline naturelle h a une dérivée seconde nulle en chacune de ses 2 extrémités $a = x_1$ et $b = x_3$, soit
$$h''(x_1) = 0, \quad h'(x_1) = y_1' = 2, \qquad h'(x_3) = y_3' = -4, \quad h''(x_3) = 0$$

Exercise 4

On considère la subdivision suivante de l'intervalle $[0, 5]$ *:*

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3,\ x_5 = 4,\ x_6 = 5,$$

et on étudie certaines splines d'interpolation de l'espace $\Pi_k^m = \Pi_k^m(x_i)$ $(m, k \geq 0)$*. Dans chaque cas, la restriction d'une spline* $f \in \Pi_k^m$ *à l'intervalle* $[i, i+1]$ *sera notée* f_i*.*

Partie I.

On considère l'ensemble $E = \{ f \in \Pi_{19}^{37},\ f(x) = 0 \ \text{pour} \ x \in [0, 1] \cup [2, 3] \cup [4, 5] \}$

1. *Vérifier que* E *est un espace vectoriel.*
2. *Déterminer la dimension de* E*.*

Partie II.

On considère maintenant l'espace vectoriel

$$F = \{ f \in \Pi_1^2,\ f(x) = 0 \ \text{pour} \ x \in [0, 1] \cup [4, 5].$$

Pour des paramètres réels α *et* β *donnés, on considère le problème d'interpolation suivant.*

$$\text{Trouver } f \in F \text{ tel que } f(2) = \alpha \text{ et } f(3) = \beta.$$

3. *Résoudre précisément ce problème selon les valeurs de* α *et* β*.*
   En particulier, lorsque cela est possible, on donnera l'expression de chacune des restrictions f_i, $i = 0, ..., 4$ *de la (ou des) spline(s)* f *solution(s) de ce problème.*
4. *Lorsque cela est possible, déterminer la dimension de* F *et donner une base de cet espace vectoriel.*

Solution

Partie I.

1. Il suffit de vérifier que E est un sous espace vectoriel de Π_{19}^{37}.
   La fonction nulle de Π_{19}^{37} s'annulle sur $[0,1] \cup [2,3] \cup [4,5]$ et est donc dans E qui n'est pas vide.
   Toute combinaison linéaire d'éléments de E reste nulle sur $[0,1] \cup [2,3] \cup [4,5]$ et est donc dans E qui est stable par CL.

2. Soit $f \in E$.
   Le contact C^{19} de sa restriction f_1 en $x_2 = 1$ et en $x_3 = 2$ avec les polynômes nuls $f_0(x)$ et $f_2(x)$ conduit à l'expression suivante pour $f_1(x)$
   $$f_1(x) = Q_1(x)\,(x-1)^{20}\,(x-2)^{20}$$
   où $Q_1(x)$ est un polynôme à déterminer. L'analyse des degrés conduit à $Q_1(x) = 0$ et à $f_1 = 0$.
   Le même raisonnement conduit à $f_3 = 0$ et finalement f est nécessairement nul.
   Ainsi, E est l'espace vectoriel nul, $E = \{0\}$ et sa dimension est 0.

Partie II.

3. Soit $f \in F$ et f_i ses restrictions aux intervalles $[i, i+1]$.
   Le contact C^1 en $x_2 = 1$ et en $x_5 = 4$ ainsi que les contraintes d'interpolation $f(2) = \alpha$ et $f(3) = \beta$ conduisent à
   $$f_1(x) = \alpha\,(x-1)^2 \qquad \text{et} \qquad f_3(x) = \beta\,(x-4)^2$$
   Reste à déterminer le polynôme $f_2(x) = a + b\,x + c\,x^2$. Les contraintes sont les suivantes :
   – l'interpolation $f(2) = \alpha$ et le contact C^1 en $x_3 = 2$ avec f_1,
   – l'interpolation $f(3) = \beta$ et le contact C^1 en $x_4 = 3$ avec f_3, ce qui conduit au système
   $$\left\{\begin{array}{ll} f_2(2) & = \alpha \\ f_2(3) & = \beta \\ f_2'(2) & = f_1'(2) \\ f_2'(3) & = f_3'(3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} a + 2b + 4c & = \alpha \\ a + 3b + 9c & = \beta \\ b + 4c & = 2\alpha \\ b + 6c & = -2\beta \end{array}\right. \underset{Gauss}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rl} a + 2b + 4c & = \alpha \\ b + 5c & = \beta - \alpha \\ c & = \beta - 3\alpha \\ 0 & = 4\alpha - 4\beta \end{array}\right.$$
   La méthode de Gauss fait apparaitre la condition de compatibilité $4\alpha - 4\beta = 0$. On distincte alors 2 cas.
   a) Si $\alpha \neq \beta$, il n'y a pas de solution et l'ensemble F est vide.
   b) Si $\alpha = \beta$, il existe une unique solution conduisant à
   $$f_0 = 0\,, \quad f_1(x) = \alpha\,(x-1)^2\,, \qquad f_2(x) = \alpha\,(-11+10x-2x^2)\,, \quad f_3(x) = \alpha\,(x-4)^2\,, \quad f_4 = 0.$$

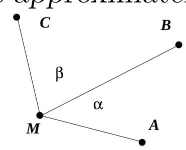
4. Pour $\alpha = \beta$, l'espace F est de dimension 1. Chaque élément de F est un multiple de l'élément de base suivant (associée à la valeur $\alpha = 1$)
   $$f_0 = 0\,, \quad f_1(x) = (x-1)^2\,, \qquad f_2(x) = -11 + 10x - 2x^2\,, \quad f_3(x) = (x-4)^2\,, \quad f_4 = 0.$$

TD : Approximation aux Moindres Carrés – Corrigé

Exercise 1

A hiker M is lost in the mountains. He succeeds in locating in front of him three summits A, B and C which he has located on his map and he measures approximately the following angles

$$\begin{array}{lcl} \widehat{MA, MB} = \alpha & \simeq & 62 \text{ grades} \\ \widehat{MB, MC} = \beta & \simeq & 72 \text{ grades} \\ \widehat{MA, MC} = \alpha + \beta & \simeq & 131 \text{ grades} \end{array}$$



Determine the best values for α and β.

Solution

Clair. Il suffit de considérer l'écriture matricielle de ces équations linéaires

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 62 \\ 72 \\ 131 \end{pmatrix}$$

et de résoudre le système des équations normales associé : $\hat{\alpha} = 61,\ \hat{\beta} = 71$

Exercise 2

A team of topographers measured the altitudes of three villages A, B and C relative to sea level. The results are:

altitude of A relative to sea level: 347 meters,
altitude de B relative to sea level: 201 meters,
altitude de C relative to sea level: 159 meters.

In order to check the measurements, another team measures the differences in altitude:

altitude difference between A and B: 142 meters,
altitude difference between A and C: 192 meters,
altitude difference between B and C: 44 meters.

Determine the best values for the altitudes.

Solution

Clair. Il suffit de considérer l'écriture matricielle de ces équations linéaires

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_A \\ z_B \\ z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 347 \\ 201 \\ 159 \\ 142 \\ 192 \\ 44 \end{pmatrix}$$

et de résoudre le système des équations normales associé : $\hat{z_A} = 347,\ \hat{z_B} = 202.5,\ \hat{z_C} = 157.5$

Exercise 3

We consider the following linear system where α is a strictly positive real parameter :

$$\begin{array}{ccccccc} x & & & & & = & -2 \\ & & y & & & = & 1 \\ & & & & z & = & 2 \\ \alpha\, x & + & \alpha\, y & + & \alpha\, z & = & 0 \end{array}$$

1. *Solve this linear system according to parameter α by the least squares method.*
2. *Specify the expression (the quantity) minimized by this least squares approach.*
3. *Specify the limit value of the the solution as α tends to $+\infty$. Conclusion ?*

Solution

Nous répondons d'abord à la deuxième question.

2.

$$\begin{aligned}\min_X ||AX-b||^2 = \min_X || \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \alpha(x+y+z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ||^2 \\ = (x-(-2))^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 + \alpha^2(x+y+z-0)^2\end{aligned}$$

1.

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1+\alpha^2 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha^2 & 1+\alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2-7\alpha^2}{1+3\,\alpha^2} & \to \frac{-7}{3} \\ y = \dfrac{1+2\alpha^2}{1+3\,\alpha^2} & \to \frac{2}{3} \\ z = \dfrac{2+5\alpha^2}{1+3\,\alpha^2} & \to \frac{5}{3} \end{cases}$$

3. Solution above : the last equation becomes dominant when its weight α increases. The minimization problem can be rewritten as

$$\min_x ||Ax-b||^2_\Omega \quad \text{with} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \Omega = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

Exercise 4

Un phénomène physique relie deux quantités x et y ($y > 0$) selon un modèle (ou une loi) que l'on peut écrire :

$$y = a\, x\, e^{bx+cx^2}$$

où $a > 0$, b et c sont trois paramètres inconnus. Des mesures fournissent un ensemble de données (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, les valeurs x_i, y_i étant strictement positives.

1. *Proposer une méthode d'approximation aux moindres carrés permettant d'estimer les*

paramètres a, b et c du modèle précédent.

2. *Préciser la quantité que minimise cette méthode.*

3. *Ecrire le système linéaire 3 × 3 permettant d'obtenir la solution $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ minimisant cette quantité.*

Solution

1. Le modèle proposé est non linéaire. On applique la méthode des moindres carrés au modèle linéarisé :
$$\ln y = \ln a + \ln x + b\,x + c\,x^2$$
où les paramètres à estimer sont désormais $A = \ln a$, b et c.

2. La quantité minimisée est alors $E(A,b,c) = \sum_{i=1}^{n} \Big| \big(\ln y_i - \ln x_i\big) - \big(A + b\,x_i + c\,x_i^2\big) \Big|^2$

3. L'application de la méthode des moindres carrés conduit à résoudre le système linéaire
$$\begin{pmatrix} n & \sum_i^n x_i & \sum_i^n x_i^2 \\ \sum_i^n x_i & \sum_i^n x_i^2 & \sum_i^n x_i^3 \\ \sum_i^n x_i^2 & \sum_i^n x_i^3 & \sum_i^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i^n (\ln y_i - \ln x_i) \\ \sum_i^n x_i\,(\ln y_i - \ln x_i) \\ \sum_i^n x_i^2\,(\ln y_i - \ln x_i) \end{pmatrix}$$

Exercise 5 (*Moindres carrés continus et discrets*)

On souhaite approcher la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[0,1]$ par une droite d'équation $p(x) = a\,x + b$ selon l'un des critères suivants.

Première approche : minimisation de la norme (au carré) : $E(a,b) = \displaystyle\int_0^1 \Big(f(x) - p(x)\Big)^2 \mathrm{d}x$

1. *Donner l'expression de la forme quadratique $E(a,b)$*

2. *Minimiser cette forme quadratique. Indication : on pourra au choix, soit montrer que cette forme quadratique est définie strictement positive (2 valeurs propres > 0) et appliquer le résultat du cours, ou alors déterminer son unique point critique, et on admettra qu'il s'agit d'un minimum strict global.*

   On notera a_1, b_1 la solution de ce problème de minimisation et $p_1(x) = a_1\,x + b_1$ la solution du problème posé.

Seconde approche : méthode des moindres carrés discrets appliquée aux données suivantes :

pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les $n+1$ points distincts définis par $(x_i = i/n,\ y_i = f(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

3. *Préciser la quantité minimisée par la méthode des moindres carrés appliquée aux données (x_i, y_i)*

4. *Expliciter le système linéaire d'ordre 2 permettant de déterminer la solution de ce problème de moindres carrés. Ce système sera simplifié au maximum : chaque coefficient sera polynomial en n, de degré au plus 1.*
   Indication : $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

5. *Résoudre ce système linéaire. On notera $a(n)$ et $b(n)$ la solution.*

6. *Déterminer les limites $a_2 = \lim_{n\to+\infty} a(n)$ et $b_2 = \lim_{n\to+\infty} b(n)$*

7. *Comparer les 2 approches.*

Solution

Première approche

1.
$$E(a,b) = \int_0^1 \left(x^2 - (a\,x+b)\right)^2 \mathrm{d}x \quad = \int_0^1 \left(x^4 + a^2\,x^2 + b^2 - 2\,a\,x^3 - 2\,b\,x^2 + 2\,a\,b\,x\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{5} + \frac{a^2}{3} + b^2 - \frac{a}{2} - \frac{2}{3}\,b + a\,b$$

2. **Solution 1 :** $E(a,b) = (a,b)\begin{pmatrix}1/3 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} - 2\,(1/4, 1/3)\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} + \frac{1}{5}$ est une forme quadratique définie strictement positive. En effet le déterminant et la trace de la matrice $\begin{pmatrix}1/3 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}$ sont strictement positifs, ce qui montrent que ses 2 valeurs propres sont strictement positives.
Ainsi, d'après la Proposition **??** du chapitre *Approximation*, le minimum de cette forme quadratique est obtenue par résolution du système linéaire
$\begin{pmatrix}1/3 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/4\\ 1/3\end{pmatrix}$ ce qui conduit à la solution $a_1 = 1$ et $b_1 = -\frac{1}{6}$ et $p_1(x) = x - \frac{1}{6}$

   Solution 2 : On détermine le ou les points critiques par résolution du système
$$\left\{\begin{array}{rcccl} \dfrac{\partial E}{\partial a}(a,b) & = & \frac{2}{3}\,a + b - \frac{1}{2} & = & 0\\[2ex] \dfrac{\partial E}{\partial b}(a,b) & = & a + 2\,b - \frac{2}{3} & = & 0\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad a = 1,\ b = -\frac{1}{6}$$
   La matrice hessienne au point critique
$$H_E(1, -\frac{1}{6}) = \begin{pmatrix}\frac{\partial^2 E}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial a \partial b}\\[1ex] \frac{\partial^2 E}{\partial b \partial a} & \frac{\partial^2 E}{\partial b^2}\end{pmatrix}(1, -\frac{1}{6}) = \begin{pmatrix}2/3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$
   admet 2 valeurs propres strictement positives ce qui montre que le point $(a = 1,\ b = -\frac{1}{6})$ est un minimum strict (local) de la fonction $E(a,b)$. On vérifie ensuite qu'il s'agit d'un minimum global, et on retrouve $p_1(x) = x - \frac{1}{6}$.

Seconde approche

3. La quantité minimisée est $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left| (\frac{i}{n})^2 - (a\,\frac{i}{n} + b)\right|^2$

4. La solution approchée (au sens des moindres carrés) du système linéaire

$$AX = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0/n & 1 \\ 1/n & 1 \\ \vdots & \vdots \\ i/n & 1 \\ \vdots & \vdots \\ n/n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0/n)^2 \\ (1/n)^2 \\ \vdots \\ (i/n)^2 \\ \vdots \\ (n/n)^2 \end{pmatrix}$$

est obtenue par résolution du système linéaire

$$A^t\, A\, X = A^t\, B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n (i/n)^2 & \sum_{i=0}^n i/n \\ \sum_{i=0}^n i/n & n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n (i/n)^3 \\ \sum_{i=0}^n (i/n)^2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} \\ \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} & n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n^3}\frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2\,n+1 & 3\,n \\ 3\,n & 6\,n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}(n+1) \\ 2\,n+1 \end{pmatrix} \qquad \text{en multipliant par } \frac{6\,n}{n+1}$$

5. Par exemple, avec la méthode de Gauss, on obtient $a(n) = 1$ et $b(n) = \dfrac{1-n}{6\,n}$

6. $a_2 = \lim_{n\to+\infty} a(n) = 1$ et $b_2 = \lim_{n\to+\infty} b(n) = -\dfrac{1}{6}$

7. Ainsi $p_2(x) = x - \dfrac{1}{6} = p_1(x)$ ce qui montre que la minimisation de la quantité (continue) $\displaystyle\int_0^1 \Big(f(x) - p(x)\Big)^2 dx$ peut être vue comme la limite de la minimisation de la quantité (discrète) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \Big(\, f(x_i) - p(x_i)\Big)^2$ lorsque le nombre de points tend $+\infty$ (avec une distribution uniforme).

Exercise 6 (*Moindres carrés pondérés*)

Plusieurs étudiants effectuent dans des conditions strictement équivalentes chacun une mesure (x_i, y_i) d'un phénomène physique pouvant être représentée (a priori) par une loi linéaire $y = a\,x + b$. Les mesures sont les suivantes : $(1,1)$ pour 3 étudiants, $(7,2)$ pour 1 étudiant, $(11,5)$ pour 1 étudiant, et $(14,2)$ pour 2 étudiants.

1. *Proposer une méthode permettant d'identifier les paramètres du modèle. En particulier, écrire le système linéaire 2×2 permettant d'identifier ces paramètres, résoudre ce système et donner la quantité minimisée.*

2. *Laura qui a effectué la mesure $(7,2)$ affirme avec gravité que sa mesure est exacte. Qu'en pensez-vous ?*

3. *Si chaque mesure était "certaine", quel modèle et quelle méthode devrait-on utiliser ?*

Indication : on notera que

$$\begin{pmatrix} 7 & -49 \\ -49 & 565 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 565 & 49 \\ 49 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1554 & 0 \\ 0 & 1554 \end{pmatrix}$$

Solution

1. Les mesures des étudiants étant équivalentes, chaque mesure à la même validité. Ainsi, chaque mesure distincte doit être affectée d'un poids correspondant au nombre d'étudiants ayant fait cette mesure. On a donc ici 4 mesures distinctes $(x_1, y_1) = (1,1)$, $(x_2, y_2) = (7,2)$, $(x_3, y_3) = (11,5)$, $(x_4, y_4) = (14,2)$ respectivement affectées des poids $w_1 = 3, w_2 = 1, w_3 = 1, w_4 = 2$. On cherche alors une solution approchée (au sens des moindres carrés) au système linéaire

$$AX = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ x_4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 1 \\ 11 & 1 \\ 14 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

prenant en compte le poids de chaque mesure. On introduit pour cela la matrice carrée diagonale $\Omega = \mathrm{diag}(w_1, w_2, w_3, w_4)$ et la norme de $\mathbb{R}^4$ définie pour $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^t \in \mathbb{R}^4$ par $||U||_\Omega^2 = U^t\,\Omega\,U = \sum_{i=1}^4 w_i\,u_i^2$.
On cherche alors à minimiser

$$||AX - B||_\Omega^2 \quad = \quad || \begin{pmatrix} (a\,x_1 + b) - y_1 \\ (a\,x_2 + b) - y_2 \\ (a\,x_3 + b) - y_3 \\ (a\,x_4 + b) - y_4 \end{pmatrix} ||_\Omega^2 \quad = \quad \sum_{i=1}^4 w_i \Big((a\,x_i + b) - y_i \Big)^2.$$

On a vu en cours que la solution de ce problème est obtenue par résolution du système linéaire

$$A^t\,\Omega\,A\,X = A^t\,\Omega\,B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^4 w_i\,x_i^2 & \sum_{i=1}^4 w_i\,x_i \\ \\ \sum_{i=1}^4 w_i\,x_i & \sum_{i=1}^4 w_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^4 w_i\,x_i\,y_i \\ \\ \sum_{i=1}^4 w_i\,y_i \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 565 & 49 \\ 49 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 128 \\ 14 \end{pmatrix}$$

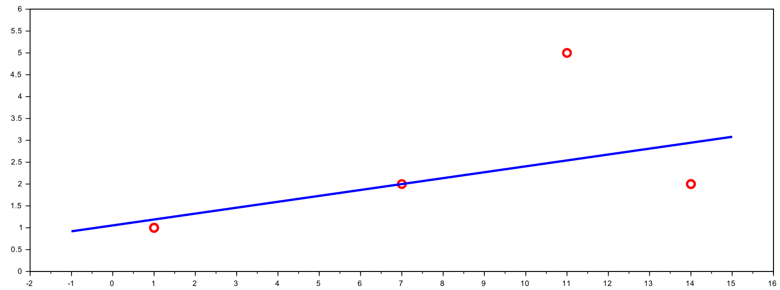
$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{1554} \begin{pmatrix} 7 & -49 \\ -49 & 565 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 128 \\ 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{1554} \begin{pmatrix} 210 \\ 1638 \end{pmatrix}$$

La droite de régression linéaire est donc la droite d'équation $y = \dfrac{210}{1554}\,x + \dfrac{1638}{1554}$

2. La mesure de Laura $(x_2, y_2) = (7, 2)$ se trouve être le barycentre des points pondérés $\big((x_i, y_i), w_i\big)$, de sorte que la droite de régression linéaire trouvée ci-dessus passera nécessairement par cette mesure. En effet, on vérifie que

$$\frac{210}{1554}\, x_2 + \frac{1638}{1554} = \frac{210}{1554}\, 7 + \frac{1638}{1554} = 2 = y_2$$

Cela donne certainement plus de “sens” à cette mesure, mais ne permet pas d’affirmer qu’elle est exacte.



3. Si chaque mesure est certaine, le modèle doit permettre de prendre en compte l’ensemble des mesures sans approximation. Il s’agit alors d’un problème d’interpolation cubique (car 4 données distinctes).

TD : Multiplicateurs de Lagrange - Approximation sous contraintes – Corrigé

Exercise 1 (*Derivative of the square of a norm*)

Let E be an Euclidean space, $\langle ., . \rangle$ its inner product and $||.||$ the associated norm.

1. *Determine the differential of the application*

$$\varphi: \ x \in E \ \mapsto \ \varphi(x) = ||x||^2 = \langle x, x \rangle \ \in \mathbb{R}^+$$

2. *Let $X : t \in \mathbb{R} \ \mapsto \ X(t) \in E$ be an application of class C^1. Determine the derivative of the application $\varphi \circ X$*

$$\varphi \circ X : t \in \mathbb{R} \ \mapsto \ ||X(t)||^2$$

Solution

1. $\forall x, h \in E$,

$$\begin{aligned} d\varphi(x).h &= \lim_{u \to 0} \frac{\varphi(x + uh) - \varphi(x)}{u}, \qquad\qquad u \in \mathbb{R}^* \\ &= \lim_{u \to 0} \frac{\langle x + uh, x + uh \rangle - \langle x, x \rangle}{u} \\ &= \lim_{u \to 0} \frac{2\,u\,\langle x, h \rangle + u^2\,\langle h, h \rangle}{u} \\ &= 2\,\langle\, x, h\,\rangle \end{aligned}$$

2. $\forall t \in \mathbb{R}$, $d(\varphi \circ X)(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ and is noted $(\varphi \circ X)'(t) := d(\varphi \circ X)(t)$.
   Similarly, $dX(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, E) \simeq E$ and $dX(t) : h \in \mathbb{R} \mapsto h\,X'(t) \in E$.
   Then, $\forall t, h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \underbrace{d(\varphi \circ X)(t)}_{(\varphi \circ X)'(t)}.\,h &= d\varphi(X(t)) \circ dX(t).\,h \\ &= d\varphi(X(t)).\big(h\,X'(t)\big) \\ &= 2\,h\,\langle\, X(t), X'(t)\,\rangle \end{aligned}$$

   which leads to $(\varphi \circ X)'(t) = 2\,\langle\, X(t), X'(t)\,\rangle$

Exercise 2

Consider the problem of modeling a parallelepipedic box without top cover, of size x, y, z, having a prescribed volume V_0 and minimizing the amount of material required.

Solution

The required amount of material (i.e. the surface of the box) is $S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ and the volume is $V(x, y, z) = xyz$. Note that the 3 dimensions x, y, z are necessarily stricly positive.

Thus our problem can be stated as minimizing $S(x,y,z)$ subject to the constraint $V(x,y,z) = V_0$, which leads to solve the following system

$$\left\{\begin{array}{rcl} \nabla S(x,y,z) &=& \lambda\,\nabla V(x,y,z) \\ \\ V(x,y,z) &=& V_0 \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{rcl} y+2\,z &=& \lambda\,y\,z \\ x+2\,z &=& \lambda\,x\,z \\ 2\,x+2\,y &=& \lambda\,x\,y \end{array}\right. \\ \\ x\,y\,z = V_0 \end{array}\right.$$

The difference of the first two equations gives $y-x = \lambda\,z\,(y-x)$, which leads to :
a) $y-x \neq 0 \Rightarrow \lambda\,z = 1 \Rightarrow z = 0$ with again the first equation, which is impossible,
or
b) $x = y$, which leads to

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2\,z &=& \lambda\,x\,z \\ 4\,x &=& \lambda\,x^2 \\ x^2\,z &=& V_0 \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl} x+2\,z &=& 4\,z \\ 4 &=& \lambda\,x \\ x^2\,z &=& V_0 \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl} x=y=2\,z &=& \sqrt[3]{2\,V_0} \\ \\ \lambda &=& 4/x \end{array}\right.$$

Exercise 3

Determine the maximum of the function $f(x,y) = x^2 + 2\,y^2$ *subject to the constraint* $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Solution
We thus consider the problem

$$\max_{g(x,y) = x^2+y^2-1=0} f(x,y) = x^2 + 2\,y^2$$

which leads to solve the system

$$\left\{\begin{array}{rcl} \nabla f(x,y) &=& \lambda\,\nabla g(x,y) \\ \\ x^2+y^2-1 &=& 0 \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{rcl} 2\,x &=& \lambda\,2\,x \\ 4\,y &=& \lambda\,2\,y \end{array}\right. \\ x^2+y^2-1=0 \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x=0 \quad \text{or} \quad \lambda=1 \\ y=0 \quad \text{or} \quad \lambda=2 \end{array}\right. \\ x^2+y^2-1=0 \end{array}\right.$$

whivh gives four stationary points $(0,\pm 1)$ and $(\pm 1, 0)$ with $f(0,1) = 2 = f(0,-1)$ and $f(1,0) = 1 = f(-1,0)$

Exercise 4 (*two constraints in* $\mathbb{R}^3$)

Determine the minimum of the function $f(x,y,z) = z$ *subject to the two constraints* $g_1(x,y,z) = x+y+z-12 = 0$ *and* $g_2(x,y,z) = x^2+y^2-z = 0$

Solution
We consider the problem

$$\min_{\substack{g_1(x,y,z) = x+y+z-12 = 0 \\ g_2(x,y,z) = x^2+y^2-z = 0}} f(x,y,z) = z$$

which consists in determining the highest point of the intersection curve between the plane $g_1 = 0$ and the paraboloid $g_2 = 0$. For this purpose we have to solve the system

$$\left\{\begin{array}{rcl} \nabla f(x,y,z) & = & \lambda_1 \, \nabla g_1(x,y,z) + \lambda_2 \, \nabla g_2(x,y,z) \\ g_1(x,y,z) & = & 0 \\ g_2(x,y,z) & = & 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & \lambda_1 + 2\,\lambda_2\, x \\ 0 & = & \lambda_1 + 2\,\lambda_2\, y \\ 1 & = & \lambda_1 - \lambda_2 \end{array}\right. \\ x + y + z - 12 = 0 \\ x^2 + y^2 - z = 0 \end{array}\right.$$

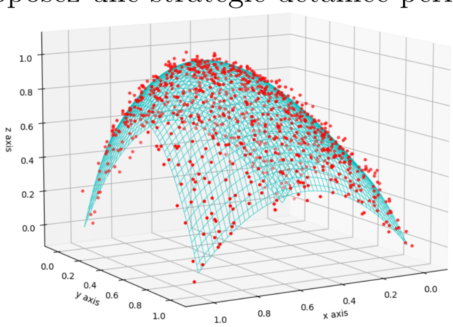
The difference of the first two equations gives $2\,\lambda_2\,(y - x) = 0$, which leads either to $\lambda_2 = 0$, which is impossible due to the third equation, or to $x = y$.
Then, with the last two equations we get $z = 12 - 2x$ and $x^2 + x - 6 = 0$ and finaly we have two stationary points : $A = (2, 2, 8)$ and $B = (-3, -3, 18)$ (resp. the minimum and the maximum according to the objective function f).

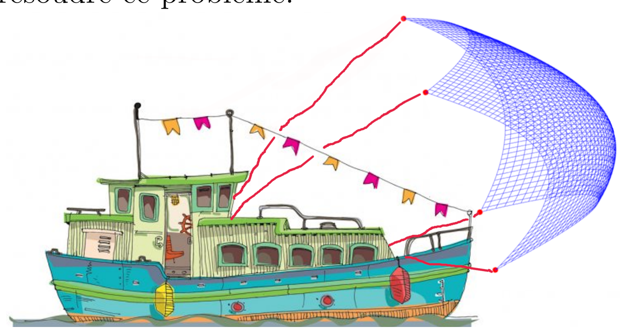
<u>Exercice</u> (Le vent en poupe ...)

Sur sa péniche, Djémaa rêve d'horizons lointains et se prend à imaginer l'installation d'une voile qui l'amènerait sous d'autres cieux... L'affaire n'est pas simple, mais l'exemple des grands voiliers d'autrefois la transcende... la voilà donc prête à appareiller...
Après une étude aérodynamique et quelques calculs de résistance des matériaux, elle obtient un grand nuage de points représentant une approximation de la géométrie idéale de cette voile. Ces données issues de calculs numériques et d'essais en soufflerie étant quelque peu bruitées, il lui faut maintenant les lisser à l'aide d'une surface polynomiale définie par produit tensoriel [1]

Pour ce faire, aucun souci, elle appelle sa copine Vae, qui après quelques crochets dans les tréfonds d'un polycopié détricotte vite cet embrouillamini et sort de son bas de laine la stratégie suivante.
"*Il faut commencer par traiter une situation simplifiée !*"
La voile sera définie par produit tensoriel comme le graphe d'une fonction polynomiale de degré 3 en x et de degré 3 en y sur l'ensemble $[0,1]^2$ et sera bien évidemment déterminée par approximation. Les données issues des calculs numériques de Djémaa sont les points (x_i, y_i, z_i), $i = 1, \ldots, N$ avec $N > 400$ (points rouges sur la figure ci-dessous à gauche). Les données (x_i, y_i) étant réparties *à peu près* uniformément sur l'ensemble $[0,1]^2$.
Mais bien évidemment, la voile étant fixée au gréement aux 4 coins du carré $[0,1]^2$, il faudra gérer des contraintes d'interpolation en ces points.

Proposez une stratégie détaillée permettant de résoudre ce problème.





Solution

Cet exercice est une étude préliminaire au projet Kinect, et même l'étape essentielle : approximation d'un nuage de points bruités (le visage) sous des contraintes aux bords pour le raccordement au reste de la tête (ici on ne considère des contraintes qu'aux 4 coins).
Les données (x_i, y_i) sont quelconques dans le domaine $[0,1]^2$.

En théorie, trois méthodes sont envisageables, mais en pratique [2], une seule est raisonnablement possible cette année :
- la première approche faisant intervenir des poids serait excessivement lourde et n'est donc pas raisonnable,
- l'approche *minimisation avec contraintes égalités*, semble la plus naturelle, elle est d'implémentation

[1]Si $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_p(x)$ est une base de $\mathbb{R}_p[x]$ et $g_0(y), g_1(y), \ldots, g_q(y)$ est une base de $\mathbb{R}_q[y]$, alors $\{f_i(x)g_j(y),\ 0 \le i \le p,\ 0 \le j \le q\}$ est une base de l'espace $\mathbb{R}_{p,q}[x,y]$ des polynômes à 2 variables x et y, de degré p en x et de degré q en y. Ainsi tout élément $F(x,y)$ de $\mathbb{R}_{p,q}[x,y]$ s'écrit de manière unique sous la forme $F(x,y) = \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} c_{i,j} f_i(x) g_j(y)$ et le graphe de la fonction F est une surface dite définie par produit tensoriel.

[2]"*In theory there is no difference between theory and practice. In practice there is*" — Yogi Berra

aisée (et conduirait à un système linéaire de taille 16×16, contre 12×12 pour la 3ème méthode ci-dessous), mais elle n'a pas été vue en cours...
Reste donc l'approche qui consiste à intégrer les contraintes d'interpolation aux 4 coins directement dans le modèle. Cette approche est la plus efficace dans notre contexte, elle demande juste une petite analyse préliminaire. Les étapes sont les suivantes

• Le cap a été fixé par Vae : la surface approximant la voile sera le graphe d'une fonction polynomiale F à deux variables x et y, de degré 3 en x et de degré 3 en y définie sur l'ensemble $[0,1]^2$ car les données (x_i, y_i) sont réparties dans ce domaine. — Cet espace vectoriel de polynômes en 2 variables est de dimension 16 $(= 4 \times 4)$.

• Il nous faut maintenant choisir une base de cet espace. L"exercice 1 nous incite à choisir la base de Bernstein (cubique) pour chaque variable x et y, ce qui conduit à l'expression suivante pour F

$$F(x,y) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} c_{i,j} B_i^3(x) B_j^3(y) \tag{1}$$

• Une conséquence directe de ce choix (au vu de l'exercice 1) est la propriété d'interpolation aux coins

$$\begin{array}{ll} F(0,0) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} c_{ij}\, B_i^3(0)\, B_j^3(0) = c_{00} & F(0,1) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} c_{ij}\, B_i^3(0)\, B_j^3(1) = c_{03} \\ F(1,0) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} c_{ij}\, B_i^3(1)\, B_j^3(0) = c_{30} & F(1,1) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} c_{ij}\, B_i^3(1)\, B_j^3(1) = c_{33} \end{array} \tag{2}$$

• Le problème consiste maintenant à déterminer la "*meilleure*" fonction $F(x,y)$ définie par (1) telle que

$$\begin{array}{c} F(x_k, y_k) \simeq z_k \\ k = 1, \ldots, N \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{ll} F(0,0) = Z_{00} & F(0,1) = Z_{01} \\ F(1,0) = Z_{10} & F(1,1) = Z_{11} \end{array} \tag{3}$$

où les Z_{ij} sont des réels fixés qui représentent les conditions d'interpolation aux coins.

• La notion de "*meilleure fonction F*" suppose le choix d'un critère d'approximation, qui ici sera bien évidemment celui des moindres carrés. Il s'agit donc d'un problème de minimisation sous contraintes d'égalité

$$\min_{\substack{c_{ij} \\ F(0,0)=Z_{00},\ F(0,1)=Z_{01} \\ F(1,0)=Z_{10},\ F(1,1)=Z_{11}}} \sum_{k=1}^{N} \Bigg(\underbrace{\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} c_{i,j} B_i^3(x_k) B_j^3(y_k)}_{F(x_k,y_k)} - z_k \Bigg)^2$$

• La propriété d'interpolation aux coins (2) des surfaces de Bézier tensorielles montre que les 4 coefficients c_{00}, c_{01}, c_{10}, c_{11}, sont déterminés par les contraintes d'interpolation (3), à savoir

$$c_{00} = Z_{00}, \quad c_{03} = Z_{01}, \quad c_{30} = Z_{10}, \quad c_{33} = Z_{11}$$

de sorte que notre problème s'écrit maintenant sous la forme d'un problème d'approximation aux moindres carrés sans contraintes (*on passe en second membre les termes connus*) :

$$\min_{\substack{c_{ij} \\ (i,j) \in \hat{I}}} \sum_{k=1}^{N} \Bigg(\sum_{(i,j)\in \hat{I}} c_{i,j} B_i^3(x_k) B_j^3(y_k) - \Big(z_k - Z_{00}\, \varphi_{00}(x_k,y_k) - Z_{01}\, \varphi_{03}(x_k,y_k) - Z_{10}\, \varphi_{30}(x_k,y_k) - Z_{11}\, \varphi_{33}(x_k,y_k) \Big) \Bigg)^2$$

en notant $\varphi_{ij}(x_k, y_k) = B_i^3(x_k)B_j^3(y_k)$ et $\hat{I} = \{(i,j),\ 0 \le i \le 3,\ 0 \le j \le 3\} - \{(0,0),(0,3),(3,0),(3,3)\}$.

• Nous écrivons maintenant ce problème sous forme matricielle. Notons A_{ij} le vecteur colonne composé des N éléments $\varphi_{ij}(x_k, y_k)$:

$$A_{ij} = \Big(\varphi_{ij}(x_1, y_1), \ldots, \varphi_{ij}(x_k, y_k), \ldots, \varphi_{ij}(x_N, y_N)\Big)^T$$

et $\hat{A}$ la matrice, de taille $N \times 12$, obtenue par concaténation des vecteurs colonnes A_{ij} pour $(i,j) \in \hat{I}$.

Notre problème d'approximation sous contraintes d'interpolation aux 4 coins s'écrit alors

$$\min_{\substack{c_{ij} \\ (i,j)\in\hat{I}}} \left\| \hat{A} \begin{pmatrix} c_{01} \\ c_{02} \\ c_{10} \\ c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ c_{20} \\ c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \\ c_{31} \\ c_{32} \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix} - Z_{00}\, A_{00} - Z_{01}\, A_{03} - Z_{10}\, A_{30} - Z_{11}\, A_{33} \right) \right\|^2 \qquad \text{noté} \quad \min_{c_{ij}} \left\| \hat{A}\,\hat{X} - \hat{B} \right\|^2$$

• La solution est obtenue par résolution des équations normales (système de taille 12×12)

$$\hat{A}^T \hat{A}\,\hat{X} = \hat{A}^T \hat{B} \qquad \text{avec bien sur} \quad c_{00} = Z_{00},\ c_{03} = Z_{01},\ c_{30} = Z_{10},\ c_{33} = Z_{11}.$$