Intervalles de confiance

1. Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ un échantillon de la loi de Bernoulli de paramètre p. L'estimateur des moments de p est $F_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Si u_α désigne le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ d'une loi normale centrée réduite alors

$$\left[F_n - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{F_n(1-F_n)}; F_n + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{F_n(1-F_n)}\right]$$

   est un intervalle de confiance approximativement de niveau $1-\alpha$ pour p si $np > 10$ et $n(1-p) > 10$. Choisir une valeur de p, strictement comprise entre 0 et 1. Tirer 100 échantillons de taille 100 de la loi de Bernoulli de paramètre p. Pour $\alpha = 0.1$, puis 0.05, puis 0.01, calculer les valeurs prises par les 100 intervalles de confiance bilatéraux de niveau $1-\alpha$ pour p. Calculer le nombre d'intervalles qui ne contiennent pas la valeur de p. Représenter graphiquement les intervalles par des segments horizontaux bleus superposés, et la vraie valeur du paramètre p par un trait rouge vertical. Pour les représentations graphiques, on pourra utiliser les commandes suivantes où *bi* (resp. *bs*) est un vecteur ligne contenant les 100 valeurs des bornes inférieurs (resp. supérieur).

```
>>matplot(rbind(bi,bs),rbind(1:100,1:100),type="l",lty=1,col="blue")
>>abline(v=p,col="red")
```

2. Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ un échantillon de la loi normale de paramètre μ et σ^2 avec σ^2 connu. L'estimateur des moments de μ est $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Si u_α désigne le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ d'une loi normale centrée réduite alors

$$\left[\overline{X} - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\sigma; \overline{X} + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\sigma\right]$$

   est un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ pour μ. Choisir une valeur de μ. Tirer 100 échantillons de taille 10 de la loi normale de paramètres μ et $\sigma^2 = 1$. Pour $\alpha = 0.1$, puis 0.05, puis 0.01, calculer les valeurs prises par les 100 intervalles de confiance bilatéraux de niveau $1-\alpha$ pour μ, en supposant σ connu. Calculer le nombre d'intervalles qui ne contiennent pas la valeur de μ. Représenter graphiquement les intervalles par des segments horizontaux bleus superposés, et la vraie valeur du paramètre μ par un trait rouge vertical.

3. Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ un échantillon de la loi normale de paramètre μ et σ^2 avec σ^2 inconnu. L'estimateur du maximum de vraisemblance de μ (resp. σ^2) est $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ (resp. $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$. Si $t_{n-1,\alpha}$ désigne le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ d'une loi de Student à $n-1$ degrés de libertés alors

$$\left[\overline{X} - \frac{t_{n-1,\alpha}}{\sqrt{n-1}}S; \overline{X} + \frac{t_{n-1,\alpha}}{\sqrt{n-1}}S\right]$$

est un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ pour μ. Choisir une valeur de μ et une valeur de σ. Tirer 100 échantillons de taille 10 de la loi normale de paramètres μ et σ^2. Pour $\alpha = 0.1$, puis 0.05, puis 0.01, calculer les valeurs prises par les 100 intervalles de confiance bilatéraux de niveau $1-\alpha$ pour μ, en supposant σ inconnu. Calculer le nombre d'intervalles qui ne contiennent pas la valeur de μ. Représenter graphiquement les intervalles par des segments horizontaux bleus superposés, et la vraie valeur du paramètre μ par un trait rouge vertical.

4. Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ un échantillon de la loi exponentielle de paramètre λ. L'estimateur du maximum de vraisemblance de λ est $T = n/(X_1 + ... + X_n)$. La variable aléatoire $\frac{n\lambda}{T}$ suit la loi Gamma de paramètres n et 1. Si u_α et v_α désignent les quantiles d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ et $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi gamma $G(1,n)$, l'intervalle $\left[\frac{Tu_\alpha}{n}; \frac{Tv_\alpha}{n}\right]$ est un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ pour λ. Choisir une valeur de λ. Tirer 100 échantillons de taille 10 de la loi exponentielle de paramètre λ. Calculer les 100 valeurs prises par l'estimateur T sur ces échantillons. Pour $\alpha = 0.1$, puis 0.05, puis 0.01, calculer les valeurs prises par les 100 intervalles de confiance de niveau $1-\alpha$ pour λ. Calculer le nombre d'intervalles qui ne contiennent pas la valeur de λ. Représenter graphiquement les intervalles par des segments horizontaux bleus superposés, et la vraie valeur du paramètre λ par un trait rouge vertical.