FEUILLE DE TD NUMÉRO 3

QUELQUES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES

Exercice 1 (Mouvement Brownien géométrique)**.** Soit X un processus vérifiant l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \tag{MBG}$$

où μ et σ sont des constantes et X_0 est une v.a. strictement positive indépendante du mouvement Brownien B telle que $\mathbb{E}[(X_0)^2] < +\infty$.

(1) Justifier sans calcul l'existence et l'unicité forte des solutions de (MBG).

(2) En utilisant la formule d'Itô, calculer explicitement la solution de (MBG). *Indication : On pourra s'inspirer de la résolution de l'équation différentielle ordinaire $y' = \mu y$.*

(3) Justifier simplement que X n'est pas un processus gaussien.

(4) Posons $\widetilde{X}_t := e^{-\mu t} X_t$. Montrer que $\widetilde{X}$ est une martingale de carré intégrable.

(5) Calculer l'espérance $\mathbb{E}[X_t]$ et la covariance $\mathrm{Cov}(X_s, X_t)$ en fonction de $\mathbb{E}[X_0]$ et $\mathbb{E}[X_0^2]$.

Exercice 2 (Processus de Ornstein–Uhlenbeck)**.** Soit X un processus vérifiant l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = a(X_t - m)dt + \sigma dB_t, \tag{OU}$$

où a, m et σ sont des constantes et X_0 est une v.a. indépendante du mouvement Brownien B telle que $\mathbb{E}[(X_0)^2] < +\infty$.

(1) Justifier sans calcul l'existence et l'unicité forte des solutions de (OU).

(2) Calculer explicitement la solution de (OU). *Indication : On pourra s'inspirer de la résolution de l'équation différentielle ordinaire $y' = a(y - m)$.*

(3) Calculer l'espérance $\mathbb{E}[X_t]$ et la covariance $\mathrm{Cov}(X_s, X_t)$ en fonction de $\mathbb{E}[X_0]$ et $\mathrm{Var}(X_0)$.

(4) Pour tout $t \geq 0$, notons $u(t, dx)$ la loi de X_t, i.e. que pour toute fonction mesurable φ, $\mathbb{E}[\varphi(X_t)] = \int \varphi(x)u(t, dx)$. Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$,

$$\begin{aligned}\int f(t,x)u(t,dx) = \int f(0,x)u(0,dx) + \int_0^t \int \frac{\partial}{\partial t} f(s,x)u(s,dx)ds \\ + a\int_0^t \int \frac{\partial}{\partial x} f(s,x)(x-m)u(s,dx)ds + \int_0^t \int \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s,x)u(s,dx)ds.\end{aligned}$$

(5) En déduire que u est une solution faible de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\Delta u - a\frac{\partial}{\partial x}\big((x-m)u\big). \tag{EDP$_{\mathrm{OU}}$}$$

Exercice 3 (Limite de champ-moyen)**.** Pour tout entier naturel n, notons $X^{n,1}, \dots, X^{n,n}$ des processus vérifiant

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad dX_t^{n,i} = -\left(X_t^{n,i} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_t^{n,j}\right)dt + dB_t^i, \tag{E$_{\mathrm{Micro}}$}$$

où les $(B_t^i)_{t\geq 0}$ sont des mouvements Browniens indépendants. Nous supposons que les valeurs initiales $X_0^{n,1},\dots,X_0^{n,n}$ sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) de loi μ_0. De plus, les mouvements Browniens et les valeurs initiales sont indépendants.

Remarque : chaque processus $X^{n,i}$ décrit la trajectoire d'une particule dans un environnement de n particules (échelle microscopique).

(1) Justifier sans calcul l'existence et l'unicité forte des solutions de ($\mathrm{E}_{\mathrm{Micro}}$).

(2) Considérons l'équation différentielle stochastique

$$d\overline{X}_t = -\left(\overline{X}_t - \mathbb{E}\left[\overline{X}_t\right]\right) dt + dB_t, \qquad (\mathrm{E}_{\mathrm{Macro}})$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien et $\overline{X}_0$ est distribué selon μ_0. Notons $m_0 := \mathbb{E}[\overline{X}_0]$. Montrer que $\overline{X}$ est solution de ($\mathrm{E}_{\mathrm{Macro}}$) si et seulement si $\overline{X}$ est solution de (OU) avec des paramètres a, m et σ bien choisis.

(3) En déduire l'existence et l'unicité forte des solutions de ($\mathrm{E}_{\mathrm{Macro}}$).

(4) Notons $v_0 := \mathrm{Var}(\overline{X}_0)$. Montrer que pour tout $t\geq 0$, $\mathrm{Var}(\overline{X}_t)\leq v_0 + 1/2$.

Remarque : le processus $\overline{X}$ décrit la trajectoire d'une particule typique dans un environnement avec une infinité de particules (échelle macroscopique).

Soient $(B^i)_{i\geq 1}$ une suite de mouvements Browniens i.i.d. et $(Y^i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi μ_0. Nous considérons dans la suite le couplage suivant : pour tout entier n, les processus $(X_t^{n,i})_{t\geq 0}$, $i=1,\dots,n$, vérifient

$$\begin{cases} dX_t^{n,i} = -\left(X_t^{n,i} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_t^{n,j}\right) dt + dB_t^i, \\ X_0^{n,i} = Y^i, \end{cases}$$

et les processus $(\overline{X}_t^i)_{t\geq 0}$, $i\geq 1$, vérifient

$$\begin{cases} d\overline{X}_t^i = -\left(\overline{X}_t^i - \mathbb{E}\left[\overline{X}_t^i\right]\right) dt + dB_t^i, \\ \overline{X}_0^i = Y^i. \end{cases}$$

Ainsi, à n fixé, nous couplons la distribution d'une solution de ($\mathrm{E}_{\mathrm{Micro}}$) avec la distribution de n copies i.i.d. de la solution de ($\mathrm{E}_{\mathrm{Macro}}$).

(5) Donner une expression simple de $X_t^{n,1} - \overline{X}_t^1$.

(6) Montrer que pour tout entier n et réel $T>0$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n,1} - \overline{X}_t^1\right|\right] \leq \sqrt{v_0 + \frac{1}{2}}\; T\exp(2T)\, n^{-1/2}.$$

Rappelons une des conséquences du Théorème porte-manteau : une suite de v.a. $(Z_n)_{n\geq 1}$ à valeur dans un espace métrique (E,d) converge en loi vers Z si et seulement si pour toute fonction $\varphi : E\to\mathbb{R}$ bornée et lipschitzienne (par rapport à la distance d),

$$\mathbb{E}\left[\varphi(Z_n)\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}\left[\varphi(Z)\right].$$

(7) En déduire les deux convergences en loi suivantes :

$$\begin{cases} \forall t\geq 0, \qquad \mathcal{L}\left(X_t^{n,1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathcal{L}\left(\overline{X}_t\right), \\ \forall T\geq 0, \qquad \mathcal{L}\left((X_t^{n,1})_{0\leq t\leq T}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathcal{L}\left((\overline{X}_t)_{0\leq t\leq T}\right), \end{cases}$$

où $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$ est muni de la topologie de la convergence uniforme.

Remarquons que $\mathcal{L}\left(\overline{X}_t\right)$ est solution de ($\mathrm{EDP}_{\mathrm{OU}}$) d'après la question (5) de l'exercice 2.