FEUILLE DE TD NUMÉRO 2

AUTOUR DU PROCESSUS DE POISSON

Notations. *Dans toute cette feuille, sauf mention explicite,* $(N_t)_{t\geq 0}$ *désignera un processus de Poisson d'intensité* $\lambda \geq 0$. *La suite de ses temps de saut sera notée* $(T_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 1 (Préliminaires)**.**

(1) Justifier que pour tout $t \geq 0$, N_t est fini presque sûrement.

(2) On note $\sigma(N_t)$ l'écart-type de N_t. Montrer que

$$\frac{\sigma(N_t)}{\mathbb{E}[N_t]} = \frac{1}{\sqrt{\lambda t}}.$$

Que dire de l'approximation de N_t par $\mathbb{E}[N_t]$ quand $\lambda t \ll 1$? Et quand $\lambda t \gg 1$?

(3) Montrer la loi faible des grands nombres : $N_t/t \to \lambda$ en probabilité.

(4) Soient $s, t \geq 0$. Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(N_s, N_t)$.

Exercice 2 (Loi forte des grands nombres)**.**

Montrer que $N_t/t \xrightarrow[t\to+\infty]{} \lambda$ presque sûrement.

Exercice 3 (Amincissement/Superposition)**.**

(1) Soient p et q dans $[0,1]$ tels que $p+q=1$. A chaque saut du processus de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$, nous associons la marque 1 avec probabilité p. Sinon, nous associons la marque 2. Le marquage de chaque point se fait indépendamment des autres.

Notons $(N_t^1)_{t\geq 0}$ le processus associé aux sauts de marque 1 et $(N_t^2)_{t\geq 0}$ le processus associé aux sauts de marque 2. Montrer que N^1 et N^2 sont des processus de Poisson indépendants d'intensités respectives $p\lambda$ et $q\lambda$.

(2) Soient N^1 et N^2 deux processus de Poisson indépendants d'intensités respectives λ_1 et λ_2. Montrer que le processus somme, noté N et défini par $N_t := N_t^1 + N_t^2$, est un processus de Poisson d'intensité $\lambda := \lambda_1 + \lambda_2$.

Notons $T^{(1)}$ (*respectivement* $T^{(2)}$) le premier temps de saut de N^1 (*resp.* N^2). Quelle est la loi de $\min(T^{(1)}, T^{(2)})$?

On remarquera que les opérations d'amincissement et de superposition sont inverses l'une de l'autre : par exemple, la superposition des deux processus amincis N^1 *et* N^2 *donne le processus initial* N.

Exercice 4 (Paradoxe de l'autobus)**.** Soit $t \geq 0$. *(dans la suite nous utilisons la convention* $T_0 = 0$*)*

(1) Expliquer avec des mots ce que désignent les variables T_{N_t} et T_{N_t+1}.

(2) Donner une première estimation naïve de l'espérance $\mathbb{E}[T_{N_t+1} - T_{N_t}]$.

(3) Expliquer avec des mots ce que désignent les variables $A_t := t - T_{N_t}$ et $B_t := T_{N_t+1} - t$.

(4) Quelle est la loi de A_t ? Et celle de B_t ?

(5) Montrer que A_t et B_t sont indépendantes.

(6) Calculer $\mathbb{E}[T_{N_t+1} - T_{N_t}]$. Quel est le paradoxe ?