FEUILLE DE TD NUMÉRO 1

AUTOUR DE LA VARIATION TOTALE

On rappelle la définition

Définition 1. La distance en variation totale entre deux mesures de probabilité μ et ν définies sur un espace $(\Omega, \mathcal{F})$ est

$$d_{TV}(\mu, \nu) := \sup_{A \in \mathcal{F}} |\mu(A) - \nu(A)| .$$

Exercice 1.

(1) On suppose que Ω est dénombrable. Trouver un ensemble $B \in \mathcal{F}$ tel que

$$\sup_{A \in \mathcal{F}} \mu(A) - \nu(A) = \mu(B) - \nu(B).$$

En déduire que

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_{x \in \Omega} |\mu(\{x\}) - \nu(\{x\})| .$$

(2) On suppose que $\Omega = [0, 1]$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue dx. De plus, on suppose que μ et ν admettent les densités f_μ et f_ν par rapport à dx. En s'inspirant de la question précédente, montrer que

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \int_\Omega |f_\mu(x) - f_\nu(x)| \, dx.$$

Exercice 2. Dans cet exercice, on note δ_x la masse de Dirac [1] en x.

(1) Calculer $d_{TV}(\delta_x, \delta_y)$ pour tout x, y dans Ω. Est-ce que la suite $(\delta_{1/n})_{n \geq 1}$ converge vers δ_0 en variation totale ?

(2) Soit $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite de mesures de probabilités définies sur un ensemble dénombrable Ω et μ une mesure de probabilités sur Ω. Montrer que, si $d_{TV}(\mu_n, \mu) \to 0$, alors

$$\mathrm{supp}(\mu) \subset \liminf_{n \to +\infty} \mathrm{supp}(\mu_n) = \cup_{n \geq 0} \cap_{k \geq n} \mathrm{supp}(\mu_k).$$

(3) On suppose que $\Omega = [0, 1]$. On note δ_0 la masse de Dirac en 0 et λ la mesure de Lebesgue sur Ω.

(a) Calculer $d_{TV}(\delta_0, \lambda)$.

(b) Que dire de la distance en variation totale entre une mesure continue par rapport à la mesure de Lebesgue et une mesure discrète ?

Exercice 3. *Indication : on pourra s'inspirer des méthodes et résultats de l'Exercice 1.*

(1) On suppose que Ω est dénombrable. Montrer que

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sup \left\{ \sum_{x \in \Omega} g(x) \left(\mu(\{x\}) - \nu(\{x\}) \right) , \ g : \Omega \to [0, 1] \text{ mesurable} \right\} .$$

1. C'est la mesure telle que pour tout $A \in \mathcal{F}$, $\delta_x(A) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon.

(2) On suppose que $\Omega = [0,1]$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue dx. De plus, on suppose que μ et ν admettent des densités f_μ et f_ν par rapport à dx. Montrer que

$$d_{TV}(\mu,\nu) = \frac{1}{2}\sup\left\{\int_\Omega g(x)\,(f_\mu(x) - f_\nu(x))\,dx,\ g : \Omega \to [0,1] \text{ mesurable}\right\}.$$

Exercice 4. Soient X et Y deux variables de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$. Écrire les probabilités correspondant

(1) au couplage indépendant des deux variables,

(2) à un couplage tel que $\mathbb{P}(X \neq Y) = 0$.

Exercice 5. On suppose que Ω est dénombrable. Montrer que

$$d_{TV}(\mu,\nu) = \inf\left\{\mathbb{P}(X \neq Y),\ (X,Y) \text{ est un couplage de } \mu \text{ et } \nu\right\}.$$

Indication : on construira un couplage qui réalise l'infimum de l'équation précédente. Evaluer $p = \sum_{x\in\Omega}\min(\mu(\{x\}),\nu(\{x\}))$ *en fonction de* $d_{TV}(\mu,\nu)$ *et voir qu'on peut choisir* $X = Y$ *avec probabilité* p.

Exercice 6. Soient P la matrice de transition d'une chaîne de Markov sur Ω et μ et ν deux mesures de probabilités sur Ω. Montrer que

$$d_{TV}(\mu P, \nu P) \leq d_{TV}(\mu,\nu).$$

Autrement dit, l'évolution d'une chaîne de Markov tend à diminuer la distance en variation totale. On a, par exemple, $d_{TV}(\mu P^{n+1},\pi) \leq d_{TV}(\mu P^n,\pi)$ *si* π *est invariante par* P.

Exercice 7. Pour i de 1 à n, soient μ_i et ν_i deux mesures de probabilité sur Ω_i. On définit les mesures $\mu := \prod_{i=1}^n \mu_i$ et $\nu := \prod_{i=1}^n \nu_i$ sur $\Omega := \prod_{i=1}^n \Omega_i$. Montrer que

$$d_{TV}(\mu,\nu) \leq \sum_{i=1}^n d_{TV}(\mu_i,\nu_i).$$

Exercice 8. Soient μ_1 et μ_2 deux probabilités sur $\mathbb{Z}$. On note $\mu_1 * \mu_2$ le produit de convolution défini par

$$\mu_1 * \mu_2(x) := \sum_{y\in\mathbb{Z}} \mu_1(y)\mu_2(x-y).$$

Montrer que

$$d_{TV}(\mu_1 * \mu_2, \nu_1 * \nu_2) \leq d_{TV}(\mu_1,\nu_1) + d_{TV}(\mu_2,\nu_2).$$

Exercice 9. Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. et X_∞ une v.a. à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On note ν_n et ν_∞ leurs lois respectives. Montrer que

$$X_n \xrightarrow{\text{loi}} X_\infty \quad \Leftrightarrow \quad d_{TV}(\nu_n,\nu_\infty) \to 0.$$

Remarque : le résultat est faux si les variables sont à valeurs dans un espace non discret – $\mathbb{Q}$ *muni de la topologie usuelle par exemple. On a déjà vu un contre-exemple dans la question 1 de l'exercice 2.*

Exercice 10. Soit $p \in [0,1]$. On note μ la loi d'une variable de Bernoulli de paramètre p et ν celle d'une variable de Poisson de paramètre p. Montrer que

$$d_{TV}(\mu,\nu) = p\,(1 - \exp(-p)).$$

Exercice 11. (Cet exercice utilise les résultats des exercices 7 à 10). Soit $\{p_{n,m} \in [0,1], n \in \mathbb{N}, 0 \leq m \leq n\}$ un ensemble tel que

$$\lambda_n := \sum_{m=0}^n p_{n,m} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda > 0 \quad \text{et} \quad \max_{0\leq m\leq n} p_{n,m} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On définit alors μ_n comme la loi de $\sum_{m=1}^{n} \zeta_{n,m}$ où les variables $\zeta_{n,m}$ sont indépendantes et de loi $\mathcal{B}(p_{n,m})$. On note par ailleurs ν_n la loi d'une variable de Poisson de paramètre λ_n, et ν celle d'une variable de Poisson de paramètre λ.

(1) En utilisant les résultats des exercices précédents, montrer que
$$d_{TV}(\mu_n, \nu_n) \leq \sum_{m=0}^{n} p_{n,m}(1 - \exp(-p_{n,m})).$$

(2) En déduire que μ_n converge vers ν pour la distance en variation totale.

(3) Quel résultat classique cet exercice permet-il de généraliser ?

Exercice 12. (Château de cartes). Soit $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels dans $[0, 1]$. On considère le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ qui satisfait la relation de récurrence
$$X_{n+1} = X_n + 1 \text{ avec probabilité } \alpha_{X_n}, \text{ et } X_{n+1} = 0 \text{ sinon.}$$
On supposera également que $X_0 = 0$ p.s.

(1) Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov. Donner son espace d'états et sa matrice de transition.

(2) Donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que la chaîne soit :
   (a) irréductible,
   (b) récurrente,
   (c) récurrente nulle.

(3) On suppose que $\sum_{k\geq 0} \prod_{i=0}^{k} \alpha_i < +\infty$. Calculer la probabilité π invariante par la chaîne.