FEUILLE DE TD NUMÉRO 3

QUELQUES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES

Correction 1.

(1) C'est une équation différentielle stochastique linéaire donc le théorème de Cauchy-Lipschitz stochastique donne le résultat.

(2) On applique la formule d'Itô avec la fonction $f(t,x) = \ln(x)$. Après simplifications, cela donne

$$df(X_t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dB_t,$$

d'où

$$\ln(X_t) = \ln(X_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t,$$

et donc

$$X_t = X_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t\right).$$

(3) Le processus X est à valeurs positives. En particulier, X_t n'est pas une variable gaussienne et donc X n'est pas un processus gaussien. En fait, X est log-normal, c'est à dire que sont logarithme est gaussien.

(4) On applique la formule d'Itô avec la fonction $f(t,x) = xe^{-\mu t}$. Après simplifications, cela donne

$$d\widetilde{X}_t = \sigma \widetilde{X}_t dB_t,$$

et donc

$$\widetilde{X}_t = \widetilde{X}_0 + \int_0^t \sigma \widetilde{X}_s dB_s.$$

Ce qui démontre que $\widetilde{X}$ est une martingale de carré intégrable.

(5) Comme $\widetilde{X}$ est une martingale et que $\widetilde{X}_0 = X_0$, on a $\mathbb{E}[\widetilde{X}_t] = \mathbb{E}[\widetilde{X}_0] = \mathbb{E}[X_0]$ et donc $\mathbb{E}[X_t] = e^{\mu t}\mathbb{E}[X_0]$. De plus, on a

$$\mathbb{E}\left[X_t\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right] e^{\mu t} e^{-\frac{\sigma^2}{2} t} \mathbb{E}\left[e^{\sigma B_t}\right],$$

d'où l'on déduit que

$$\mathbb{E}[e^{\sigma B_t}] = e^{\frac{\sigma^2}{2} t}. \tag{1}$$

Pour la covariance, on a

$$\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(s+t)\right) \mathrm{Cov}\left(X_0 e^{\sigma B_s}, X_0 e^{\sigma B_t}\right),$$

et, par indépendance entre X_0 et B,

$$\mathbb{E}\left[X_0 e^{\sigma B_s} X_0 e^{\sigma B_t}\right] = \mathbb{E}\left[X_0^2\right] \mathbb{E}\left[e^{2\sigma B_s} e^{\sigma(B_t - B_s)}\right] = \mathbb{E}\left[X_0^2\right] \mathbb{E}\left[e^{2\sigma B_s}\right] \mathbb{E}\left[e^{\sigma B_{t-s}}\right],$$

si $s < t$ par indépendance et stationnarité des incréments de B. Finalement, en utilisant (1), on en déduit que cette espérance vaut $\mathbb{E}\left[X_0^2\right]\exp(\frac{\sigma^2}{2}(s+t))\exp(\sigma^2 s)$. D'un autre côté, on a

$$\mathbb{E}\left[X_0 e^{\sigma B_s}\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right] e^{\frac{\sigma^2}{2}s} \quad \text{et} \mathbb{E}\left[X_0 e^{\sigma B_t}\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right] e^{\frac{\sigma^2}{2}t}.$$

On en déduit donc que si $s < t$,

$$\operatorname{Cov}(X_s, X_t) = e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(s+t)} e^{\frac{\sigma^2}{2}(s+t)} \left[\mathbb{E}\left[X_0^2\right] e^{\sigma^2 s} - \mathbb{E}\left[X_0\right]^2\right].$$

Ainsi, pour tout $s, t \geq 0$,

$$\operatorname{Cov}(X_s, X_t) = e^{\mu(s+t)} \left[\mathbb{E}\left[X_0^2\right] e^{\sigma^2 s \wedge t} - \mathbb{E}\left[X_0\right]^2\right].$$

Correction 2.

(1) C'est une équation différentielle stochastique linéaire donc le théorème de Cauchy-Lipschitz stochastique donne le résultat.

(2) Par méthode de variation de la constante, on chercher X_t sous la forme $X_t = Z_t e^{at}$. On applique donc la formule d'Itô avec la fonction $f(t,x) = xe^{-at}$. Après simplifications, cela donne

$$dZ_t = -mae^{-at} + \sigma e^{-at} dB_t,$$

d'où

$$Z_t = Z_0 - m(1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{-as} dB_s,$$

et donc

$$X_t = X_0 e^{at} + m(1 - e^{at}) + \sigma e^{at} \int_0^t e^{-as} dB_s.$$

(3) Par linéarité, $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0]e^{at} + m(1 - e^{at})$.

Pour la covariance, on peut utiliser l'indépendance entre X_0 et B pour simplifier

$$\operatorname{Cov}(X_s, X_t) = e^{a(s+t)} \operatorname{Var}(X_0) + \sigma^2 e^{a(s+t)} \operatorname{Cov}\left(\int_0^s e^{-as'} dB_{s'}, \int_0^t e^{-at'} dB_{t'}\right).$$

En écrivant $\int_0^t e^{-at'} dB_{t'} = \int_0^s e^{-at'} dB_{t'} + \int_s^t e^{-at'} dB_{t'}$ comme somme de deux variables indépendantes, on a pour $s < t$,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^s e^{-as'} dB_{s'}\right)\left(\int_0^t e^{-at'} dB_{t'}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^s e^{-as'} dB_{s'}\right)^2\right] = \int_0^s e^{-2as'} ds' = \frac{1}{2a}(1 - e^{-2as}),$$

où l'on a utilisé l'isométrie de l'intégrale stochastique. De l'autre côté, $\mathbb{E}\left[\int_0^s e^{-as'} dB_{s'}\right] = 0$. Donc

$$\operatorname{Cov}(X_s, X_t) = e^{a(s+t)} \operatorname{Var}(X_0) + \frac{\sigma^2}{2a} e^{a(s+t)}(1 - e^{-2as}).$$

Ainsi, pour tout $s, t \geq 0$,

$$\operatorname{Cov}(X_s, X_t) = e^{a(s+t)} \operatorname{Var}(X_0) + \frac{\sigma^2}{2a}(e^{a(s+t)} - e^{a|t-s|}).$$

(4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Par la formule d'Itô, on a

$$f(t, X_t) = \int f(0, X_0) + \int_0^t \int \frac{\partial}{\partial t} f(s, X_s) ds \\ + a \int_0^t \int \frac{\partial}{\partial x} f(s, X_s)(X_s - m) ds + \int_0^t \int \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, X_s) ds.$$

Il suffit alors de prendre l'espérance de l'équation ci-dessus pour retrouver la formule attendue.

(5) Si le support de f est compact, on peut faire tendre t vers $+\infty$ dans la formule précédente et obtenir

$$\begin{aligned}0 = \int f(0,x)u(0,dx) + \int_0^{+\infty} \int \frac{\partial}{\partial t} f(s,x)u(s,dx)ds \\ + a\int_0^{+\infty} \int \frac{\partial}{\partial x} f(s,x)(x-m)u(s,dx)ds + \int_0^{+\infty} \int \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s,x)u(s,dx)ds,\end{aligned}$$

ce qui est la formulation faible de l'EDP.

Correction 3.

(1) En notant $\mathbf{X}_t = (X_t^{n,1}, \ldots, X_t^{n,n})$ et $\mathbf{B}_t = (B_t^1, \ldots, B_t^n)$, le système se réécrit

$$d\mathbf{X}_t = A\mathbf{X}_t + d\mathbf{B}_t,$$

avec $A = -Id + n^{-1}J$ où Id est la matrice identité et

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est donc une EDS linéaire en dimension n. Le théorème de Cauchy-Lipschitz stochastique donne le résultat.

(2) Raisonnons par équivalences. Le processus $\overline{X}$ est solution de ($\mathrm{E}_{\mathrm{Macro}}$) si et seulement si (ssi),

$$\overline{X}_t = \overline{X}_0 - \int_0^t \left(\overline{X}_s - \mathbb{E}\left[\overline{X}_s\right]\right) ds + \int_0^t dB_s,$$

ssi,

$$\begin{cases} \mathbb{E}[\overline{X}_t] = m_0 - \int_0^t 0\, ds + 0 = m_0, \\ d\overline{X}_t = -\left(\overline{X}_t - m_0\right) + dB_t, \end{cases}$$

ssi le processus $\overline{X}$ est solution de (OU) avec $a = -1$, $m = m_0$ et $\sigma = 1$.

(3) Se déduit de la réponse à la question précédente et de la question (1) de l'exercice 2.

(4) D'après la réponse à la question (3) de l'exercice 2, on a

$$\mathrm{Var}(\overline{X}_t) = e^{-2t}\,\mathrm{Var}(X_0) + \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \leq v_0 + 1/2.$$

(5) En utilisant les formulations intégrales de ($\mathrm{E}_{\mathrm{Micro}}$) et ($\mathrm{E}_{\mathrm{Macro}}$), on a

$$\begin{cases} X_t^{n,1} = Y^1 - \displaystyle\int_0^t \left(X_s^{n,1} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_s^{n,j} \right) ds + B_t^1 \\ \overline{X}_t^1 = Y^1 - \displaystyle\int_0^t \left(\overline{X}_s^1 - \mathbb{E}\left[\overline{X}_s^1\right] \right) ds + B_t^1, \end{cases}$$

d'où

$$X_t^{n,1} - \overline{X}_t^1 = -\int_0^t \left(X_s^{n,1} - \overline{X}_s^1 \right) ds - \int_0^t \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_s^{n,j} - \mathbb{E}\left[\overline{X}_s^1\right] \right) ds.$$

(6) Soient $T > 0$ et $t \leq T$. Calculons (on remarque que $\mathbb{E}[\overline{X}_s^j] = \mathbb{E}[\overline{X}_s^1]$)

$$\left|X_t^{n,1} - \overline{X}_t^1\right| \leq \int_0^t \left|X_s^{n,1} - \overline{X}_s^1\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \left(X_s^{n,j} - \overline{X}_s^j\right)\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \overline{X}_s^j - \mathbb{E}\left[\overline{X}_s^j\right]\right| ds.$$

Ainsi, en notant $\delta(t) = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X_s^{n,i} - \overline{X}_s^i\right|\right]$, et en prenant l'espérance de l'équation ci-dessus, nous avons

$$\delta(t) \leq 2\int_0^t \delta(s)ds + \int_0^t \mathbb{E}\left[D_n(s)\right] ds, \tag{2}$$

où $D_n(s) := |n^{-1}\sum_{j=1}^n \overline{X}_s^j - \mathbb{E}[\overline{X}_s^j]|$. Ainsi, $\mathbb{E}[D_n(s)]$ est le moment d'ordre 1 d'une moyenne empirique de variables aléatoires centrées indépendantes. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons donc

$$\mathbb{E}\left[D_n(t)\right] \leq \mathbb{E}\left[D_n(t)^2\right]^{1/2} \leq \left(\frac{1}{n}\operatorname{Var}(\overline{X}_t^1)\right)^{1/2} \leq \sqrt{v_0 + \frac{1}{2}}\; n^{-1/2}, \tag{3}$$

en utilisant la question (4). Ainsi, pour tout $t \leq T$, on a

$$\delta(t) \leq 2\int_0^t \delta(s)ds + T\sqrt{v_0 + \frac{1}{2}}\; n^{-1/2},$$

et le lemme de Gronwall permet de conclure

$$\delta(T) \leq \sqrt{v_0 + \frac{1}{2}}\; T\exp(2T)\, n^{-1/2}.$$

(7) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne (de constante C) bornée. En utilisant le caractère lipschitzien de φ, on a pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[\left|\varphi(X_t^{n,1}) - \varphi(\overline{X}_t^1)\right|\right] \leq C\mathbb{E}\left[\left|X_t^{n,1} - \overline{X}_t^1\right|\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ce qui donne la première convergence en loi.

Soit $T \geq 0$. Notons tout d'abord que la topologie de la convergence uniforme sur $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$ est métrisée par la distance $d_{\infty,T}(f,g) = \sup_{0\leq t\leq T}|f(t) - g(t)|$. Soit $\varphi : \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne (de constante C et par rapport à $d_{\infty,T}$) bornée. En utilisant le caractère lipschitzien de φ, on a pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[\left|\varphi((X_t^{n,1})_{0\leq t\leq T}) - \varphi((\overline{X}_t^1)_{0\leq t\leq T})\right|\right] \leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n,1} - \overline{X}_t^1\right|\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ce qui donne la seconde convergence en loi.