FEUILLE DE TD NUMÉRO 2

AUTOUR DU PROCESSUS DE POISSON

Notations. *Dans toute cette feuille, sauf mention explicite,* $(N_t)_{t\geq 0}$ *désignera un processus de Poisson d'intensité* $\lambda \geq 0$. *La suite de ses temps de saut sera notée* $(T_n)_{n\geq 1}$.

Correction 1.

(1) Par définition, la variable aléatoire N_t suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda t < +\infty$: elle est donc finie presque sûrement. On vérifie,

$$\mathbb{P}\left(N_t < +\infty\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(N_t = k\right) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = 1.$$

(2) Comme $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$, on a $\sigma(N_t) = \sqrt{\mathrm{Var}(N_t)} = \sqrt{\lambda t}$ et $\mathbb{E}\left[N_t\right] = \lambda t$, d'où le résultat. On peut dire que l'approximation de N_t par son espérance est très mauvaise quand λt est petit (peu de points).

(3) Supposons que $s \leq t$. On a

$$\mathbb{E}\left[N_s N_t\right] = \mathbb{E}\left[N_s(N_t - N_s)\right] + \mathbb{E}\left[N_s^2\right],$$

et, par indépendance des incréments N_s et $N_t - N_s$,

$$\mathbb{E}\left[N_s N_t\right] = \lambda s \lambda(t-s) + \lambda s + (\lambda s)^2 = \lambda s \lambda t + \lambda s.$$

Donc,

$$\mathrm{Cov}(N_s, N_t) = \mathbb{E}\left[N_s N_t\right] - \mathbb{E}\left[N_s N_t\right] = \lambda s = \mathrm{Var}(N_s).$$

Et, plus généralement, $\mathrm{Cov}(N_s, N_t) = \lambda \min(s,t)$.

Correction 2. Pour tout $k \geq 1$, notons $X_k = N_k - N_{k-1}$. Les variables X_k sont i.i.d. de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et $N_k = \sum_{k'=1}^{k} X_{k'}$. La loi forte des grands nombres donne donc $N_k/k \to \lambda$ presque sûrement. Mais,

$$\frac{N_{\lfloor t\rfloor}}{t} \leq \frac{N_t}{t} \leq \frac{N_{\lfloor t\rfloor+1}}{t} = \frac{N_{\lfloor t\rfloor+1}}{\lfloor t\rfloor+1}\frac{\lfloor t\rfloor+1}{t},$$

et on en déduit que $N_t/t \to \lambda$ p.s.

Correction 3.

(1) Soient k_1, k_2 des entiers et $t \geq 0$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(N_t^1 = k_1, N_t^2 = k_2\right) &= \mathbb{P}\left(N_t^1 = k_1, N_t^2 = k_2, N_t = k_1 + k_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(N_t^1 = k_1, N_t^2 = k_2 \middle| N_t = k_1 + k_2\right) e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k_1+k_2}}{(k_1+k_2)!} \\
&= \binom{k_1+k_2}{k_1} p^{k_1} q^{k_2} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k_1+k_2}}{(k_1+k_2)!} \\
&= e^{-\lambda p t}\frac{(\lambda p t)^{k_1}}{k_1!} e^{-\lambda q t}\frac{(\lambda q t)^{k_2}}{k_2!}.
\end{aligned}$$

On en déduit donc que N_t^1 et N_t^2 sont indépendants de lois $\mathcal{P}(\lambda pt)$ et $\mathcal{P}(\lambda qt)$. Il suffit alors de vérifier l'indépendance des incréments de N^1 (de même pour N^2) pour montrer que c'est un processus de Poisson. Soient k, k' des entiers et $0 \leq r \leq s \leq t$. On a

$$\mathbb{P}\left(N_t^1 - N_s^1 = k, N_s^1 - N_r^1 = k'\right) = \sum_{n=k}^{+\infty} \sum_{n'=k'}^{+\infty} p_{k,k',n,n'},$$

où

$$p_{k,k',n,n'} := \mathbb{P}\left(N_t^1 - N_s^1 = k, N_s^1 - N_r^1 = k', N_t - N_s = n, N_s - N_r = n'\right).$$

Mais,

$$p_{k,k',n,n'} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \binom{n'}{k'} p^{k'} q^{n'-k'} e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^n}{n!} e^{-\lambda(s-r)} \frac{(\lambda(s-r))^{n'}}{n'!}.$$

Par un calcul similaire à précédemment, on en déduit que

$$\mathbb{P}\left(N_t^1 - N_s^1 = k, N_s^1 - N_r^1 = k'\right) = e^{-\lambda p(t-s)} \frac{(\lambda p(t-s))^k}{k!} e^{-\lambda p(s-r)} \frac{(\lambda p(s-r))^{k'}}{k'!},$$

d'où l'indépendance des incréments (la stationnarité des incréments est laissée au lecteur).

(2) L'indépendance et la stationarité des incréments de N sont des conséquences directes de l'indépendance et de la stationarité des incréments de N^1 et N^2. Finalement, N_t est la somme de deux variables indépendantes de loi $\mathcal{P}(\lambda_1 t)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2 t)$ donc N_t suit la loi $\mathcal{P}(\lambda t)$.

Par définition, la variable $\min(T_1^{(1)}, T_1^{(2)})$ est le premier temps de saut T_1 du processus somme N. Sa loi est donc $\mathcal{E}(\lambda)$. *On retrouve le fait que le minimum de deux variables exponentielles indépendantes est une variable exponentielle.*

Correction 4.

(1) T_{N_t} est le dernier temps de saut avant le temps t. T_{N_t+1} est le premier temps de saut (strictement) après le temps t.

(2) $T_{N_t+1} - T_{N_t}$ est le délai entre les deux sauts qui entourent le temps t. On s'attend à ce que son espérance soit l'espérance du délai inter-sauts, i.e. on s'attend à $\mathbb{E}\left[T_{N_t+1} - T_{N_t}\right] = 1/\lambda$.

(3) A_t est le temps écoulé depuis le dernier saut. B_t est le temps qu'il reste avant le prochain saut.

(4) Soit $r \geq 0$. On calcule la fonction de répartition,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_t \leq r) = \mathbb{P}(t - T_{N_t} \leq r) &= 1 \quad \text{si } r \geq t \\ &= \mathbb{P}(N_t - N_{t-r} \neq 0) = 1 - e^{-\lambda r} \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Donc, la loi de A_t est une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ tronquée (c'est la loi de $\min(T_1, t)$). De même,

$$\mathbb{P}(B_t \leq r) = \mathbb{P}(T_{N_t+1} - t \leq r) = \mathbb{P}(N_{t+r} - N_t \neq 0) = 1 - e^{-\lambda r}.$$

Donc B_t suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ (la même que T_1).

(5) Notons $\mathcal{F}_t = \sigma(N_s, s \leq t)$. La variable A_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable, alors que B_t est indépendante de $\mathcal{F}_t$, par indépendance des incréments de $(N_t)_{t\geq 0}$.

(6) On a $T_{N_t+1} - T_{N_t} = B_t + A_t$. Or,

$$\begin{cases} \mathbb{E}[A_t] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(A_t \geq r)\, dr = \int_0^t e^{-\lambda r} dr = \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}, \\ \mathbb{E}[B_t] = \mathbb{E}[T_1] = \frac{1}{\lambda}. \end{cases}$$

D'où, $\mathbb{E}\left[T_{N_t+1} - T_{N_t}\right] = 2/\lambda - e^{-\lambda t}/\lambda > 1/\lambda$. Ce résultat est paradoxal avec l'intuition que l'on avait à la question 2. *En particulier, quand t est grand, le délai entre le saut avant t et le saut après t est, en espérance, près de deux fois plus long que la normale.*